中华人民共和国教育部直属出版社
语文出版社
Language & Culture Press
www.ywcbs.com

初中升中职课程衔接

数学

第三章　不等式与不等式组

目录
CONTENTS

数学来源于生活,又服务于生活．运用方程模型可解决生活中的不少涉及等量关系的问题．事实上,在日常生产生活中,不等关系更为普遍,如利润的优化,方案的设计等方面都蕴含着不等关系．在解决实际问题时,通常把比较的对象数量化,通过分析其中的不等关系,列出相应的数学表达式.

本章介绍的是两个数量之间的大小关系,即不等关系．通过类比等式和方程,介绍什么是不等式,讨论不等式的性质,带领同学们学习一元一次不等式(组)及其解法,并利用这些知识解决一些问题,体会不等式在研究不等关系中的重要作用及数学中的类比思想.

3.1 不等式

1．不等式及其解集

问题1

(1) 某旅游团共100人，预定了某宾馆一层楼的所有房间共20间，已知每个房间可住 x 人.如果房间没有住满，那么 x 满足什么关系？

(2) 小明打算去武汉大学赏樱花，8：30他从家里出发乘坐出租车前往目的地，假设出租车保持匀速行驶，小明家距离武汉大学 30 km，为了避开人流高峰，小明要在10：00之前到达武汉大学，则车速 x km/h 应满足什么条件？

分析：可知(1)中 x 满足

$$20x > 100. \quad ①$$

(2)中 x 满足

$$\frac{30}{x} < \frac{3}{2}. \quad ②$$

1. 不等式及其解集

新 知 识

像①和②这样用符号“<”或“>”表示大小关系的式子，称为**不等式**.像 $x+3\neq x-1$，$3x-1\leqslant 2$，$5x+4\geqslant 7$ 这样用符号“≠”或“⩽”或“⩾”表示不等关系的式子也是不等式.

有些不等式中不含未知数.例如，$-3<4$，$-1>-5$.有些不等式含有未知数.例如不等式①和不等式②中字母 x 表示未知数.

与方程的解相似，使不等式成立的未知数的值称为**不等式的解**.例如6是不等式①的解，25和30是不等式②的解.

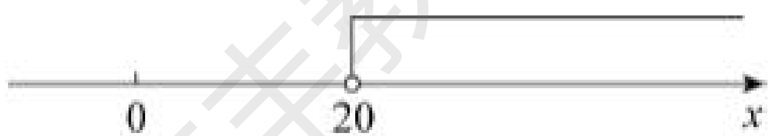
问题2　除了25和30，不等式②还有其他的解吗？如果有，这些解应满足什么条件？

1．不等式及其解集

新 知 识

一般地，一个含有未知数的不等式的所有的解组成这个**不等式的解集**.求不等式的解集的过程称为**解不等式**.

一般地，不等式的解集可以在数轴上表示出来.例如不等式$\frac{30}{x}<\frac{3}{2}$的解集在数轴上可表示为(图 3-1)：



1．不等式及其解集

归　纳

不等式的解集的表示方法：

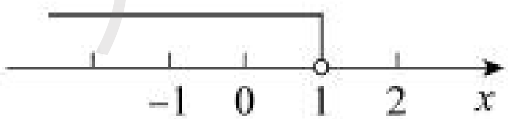
(1) 用最简的不等式表示：一般地，一个含有未知数的不等式有无数个解，其解集是一个范围，这个范围可用最简单的不等式来表示．如：不等式 $x-2\leqslant 6$ 的解集为 $x\leqslant 8$．

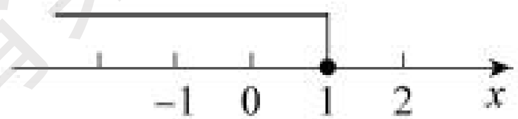
(2) 用数轴表示：不等式的解集可以在数轴上直观地表示出来，形象地表明不等式的无限个解(图 3-2)：

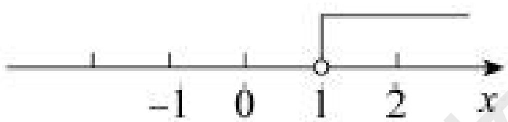
1．不等式及其解集

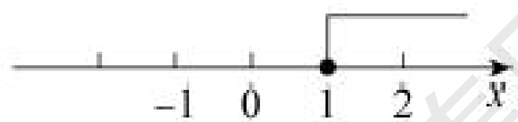
知识巩固

·例 1· 不等式 $x>1$ 在数轴上的正确表示是(　　).

A. 

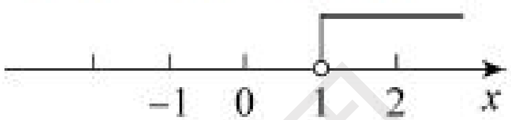
B. 

C. 

D. 

解：因为不等式 $x>1$，

所以在数轴上表示为：



故答案为 C 选项.

2．不等式的性质

探　究

用“<”或“>”填空，并总结其中的规律：

(1)$7>1$，$7+3$____$1+3$，$7-2$____$1-2$；

(2)$-2<1$，$-2+1$____$1+1$，$-2-5$____$1-5$；

(3)$-1<4$，-1×2____4×2，-1×3____4×3；

(4)$5>3$，$5\times(-1)$____$3\times(-1)$，$5\times(-3)$____$3\times(-3)$。

2．不等式的性质

新 知 识

不等式的性质：

不等式的性质1　不等式的两边加(或减)同一个数(或同一个式子)，不等号的方向不变.

$$\text{如果 } a>b\text{，那么 } a\pm c>b\pm c.$$

不等式的性质2　不等式的两边乘(或除以)同一个正数，不等号的方向不变.

$$\text{如果 } a>b, c>0\text{，那么 } ac>bc\left(\text{或}\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right).$$

不等式的性质3　不等式的两边乘(或除以)同一个负数，不等号的方向改变.

$$\text{如果 } a>b, c<0\text{，那么 } ac<bc\left(\text{或}\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right).$$

不等式的性质4　对称性：

$$\text{如果 } a>b\text{，那么 } b<a.$$

不等式的性质5　同向传递性：

$$\text{如果 } a>b, b>c\text{，那么 } a>c.$$

2．不等式的性质

知识巩固

·例 2· 利用不等式的性质解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来.

(1)$x+3<-2$；　　　　(2)$9x>8x+1$；

(3)$\frac{1}{2}x\geqslant-4$；　　　　(4)$-10x\leqslant5$.

解：(1) 利用不等式性质 1，给不等式 $x+3<-2$ 两边都减 3，

得 $x<-5$.

在数轴上表示为(图 3-3)：

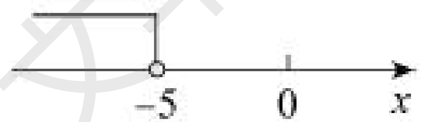


图 3-3

(2) 利用不等式性质 1，给不等式 $9x>8x+1$ 两边都减 $8x$，

得 $x>1$.

在数轴上表示为(图 3-4)：

2．不等式的性质

知识巩固

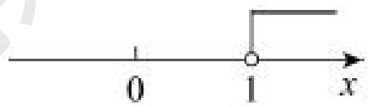


图 3-4

(3) 利用不等式性质 2，给不等式$\frac{1}{2}x \geqslant -4$ 两边都乘以 2，

得 $x \geqslant -8$．

在数轴上表示为(图 3-5)：

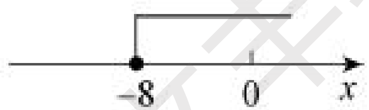


图 3-5

(4) 利用不等式性质 3，给不等式 $-10x \leqslant 5$ 两边都除以 -10，得 $x \geqslant -\frac{1}{2}$．

在数轴上表示为(图 3-6)：

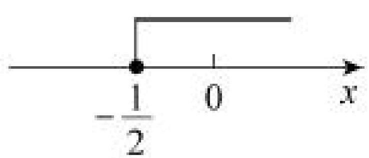


图 3-6

3．用作差法比较大小

新 知 识

通过前面的学习，比较两个式子的大小等价于判断它们的差的符号，即

(1) 若 $a-b>0$，则 $a>b$；反之，若 $a>b$，则 $a-b>0$；

(2) 若 $a-b=0$，则 $a=b$；反之，若 $a=b$，则 $a-b=0$；

(3) 若 $a-b<0$，则 $a<b$；反之，若 $a<b$，则 $a-b<0$。

3．用作差法比较大小

知识巩固

·例 3· 比较 $-\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{5}{7}$ 的大小.

解：因为 $-\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{7}\right)=-\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{-14+15}{21}=\frac{1}{21}>0$，

所以 $-\frac{2}{3}>-\frac{5}{7}$.

·例 4· 当 $a>b$ 时，比较 $3a-1$ 与 $3b-2$ 的大小.

解：因为 $a>b$，所以 $a-b>0$，即 $3(a-b)>0$，

故 $3a-1-(3b-2)=3(a-b)+1>0$，

因此 $3a-1>3b-2$.

·例 5· 当 $a>b$，$c<0$ 时，比较 ac^2 与 bc^2 的大小.

解：由 $a>b$，得 $a-b>0$，

由 $c<0$，得 $c^2>0$，

因为 $ac^2-bc^2=(a-b)c^2>0$，

所以 $ac^2>bc^2$.

3．用作差法比较大小

知识巩固

·例 3· 比较 $-\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{5}{7}$ 的大小.

解：因为 $-\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{7}\right)=-\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{-14+15}{21}=\frac{1}{21}>0$，

所以 $-\frac{2}{3}>-\frac{5}{7}$.

·例 4· 当 $a>b$ 时，比较 $3a-1$ 与 $3b-2$ 的大小.

解：因为 $a>b$，所以 $a-b>0$，即 $3(a-b)>0$，

故 $3a-1-(3b-2)=3(a-b)+1>0$，

因此 $3a-1>3b-2$.

·例 5· 当 $a>b$，$c<0$ 时，比较 ac^2 与 bc^2 的大小.

解：由 $a>b$，得 $a-b>0$，

由 $c<0$，得 $c^2>0$，

因为 $ac^2-bc^2=(a-b)c^2>0$，

所以 $ac^2>bc^2$.

3.2 一元一次不等式

问题

某次知识竞赛共有20道题，每答对一题得10分，答错或不答都要扣5分。

(1) 小明要得80分，他要答对几道题？

(2) 若要得分超过80分，他至少要答对多少题呢？那又该怎么样列式解决问题呢？

分析：(1) 设小明答对 x 道题，则答错或不答 $(20-x)$ 道题。

于是有 $10x-5(20-x)=80$，解得 $x=12$，即小明答对12道题。

(2) 设小明至少要答对 x 道题，则

$10x-5(20-x)>80$，

得 $x>12$，

因为 x 是非负的整数，即小明至少要答对13道题目。

探　究

观察下列各不等式，它们有什么共同特点？

(1) $x-3>-5$；　(2) $3y-5<10$；

(3) $-\frac{x}{3}-1>\frac{x}{4}+3$；　(4) $1.5a+12\leqslant 0.5a+4$.

不难发现上述不等式都只含有一个未知数，并且未知数的次数是 1.

新 知 识

一般地，只含有一个未知数，未知数的次数是 1 的不等式称为**一元一次不等式**.

类比解一元一次方程的思想，结合不等式的性质，可以采用"移项"的方法来求解一元一次不等式，即把不等式一边某项变号后移到另一边，而不等号的方向不变.例如把不等式 $x-3>5$ 左边的 -3 移项到右边得 $x>5+3$.

归　纳

一般地，解一元一次不等式的基本步骤为：

(1) 去分母；

(2) 去括号；

(3) 移项；

(4) 合并同类项，化为 $ax>b$(或 $ax<b$) 的形式(其中 $a\neq 0$)；

(5) 两边都除以未知数的系数(不等式的两边同时除以正数，不等号的方向不变，不等式的两边同时除以负数，不等号的方向改变).

知识巩固

·例 1· 下列式子哪些是一元一次不等式？哪些不是一元一次不等式？为什么？

①$x>0$；②$\frac{x-1}{2}>3$；③$x^2>2$；④$x+y>-3$；⑤$x=-1$.

解：①② 是一元一次不等式，③④⑤ 不是一元一次不等式.因为：③ 中未知数的最高次数不是 1 次，不等式 ④ 左边含有两个未知数，⑤ 不是不等式，是一元一次方程.

·例 2· 解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来：

(1) $-(x+1)>6+2(x-1)$；

(2) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)-1\leqslant -x+9$；

(3) $\frac{x-3}{2}-1>\frac{x-5}{3}$.

解：(1) 去括号，得 $-x-1>6+2x-2$，移项，得 $-x-2x>6-2+1$，

合并同类项，得 $-3x>5$，系数化为 1，得 $x<-\frac{5}{3}$，

知识巩固

这个不等式的解集在数轴上表示为(图 3-7):

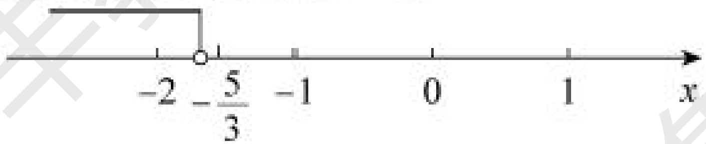


图 3-7

(2) 去括号,得 $2x+1-1\leqslant -x+9$,移项、合并同类项,得 $3x\leqslant 9$,
两边都除以 3,得 $x\leqslant 3$,
这个不等式的解集在数轴上表示为(图 3-8):

图 3-8

(3) 去分母,得 $3(x-3)-6>2(x-5)$,去括号,得 $3x-9-6>2x-10$,
移项,得 $3x-2x>-10+9+6$,合并同类项,得 $x>5$,
这个不等式的解集在数轴上表示为(图 3-9):

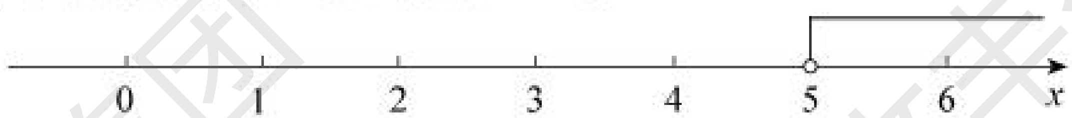


图 3-9

3.3 一元一次不等式组

问题

现有两根木条 a 和 b，a 的长为 8 cm，b 的长为 4 cm，如果再找一根木条 c，用这三根木条钉成一个三角形木框，那么对木条 c 的长度有什么要求？

分析：根据在三角形中两边之和大于第三边，两边之差小于第三边有

$$8+4>c, \quad ①$$

$$8-4<c. \quad ②$$

新 知 识

类似于方程组，把这两个一元一次不等式合起来，就组成一个**一元一次不等式组**.记作

$$\begin{cases} 8+4>c, & ① \\ 8-4<c. & ② \end{cases}$$

解不等式 ① 得 $c<12$，解不等式 ② 得 $c>4$，把不等式 ① 和 ② 的解集同时表示在一个数轴上（图 3-10）.

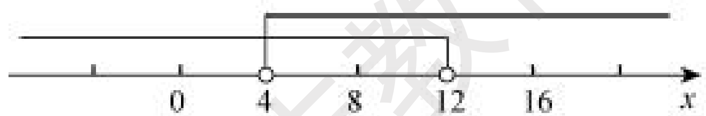


图 3-10

从图 3-10 可以看出，c 的取值范围是

$$4<c<12.$$

因此木条 c 的长度应该满足大于 4 cm 且小于 12 cm.

一般地，把组成不等式组的几个不等式的解集的公共部分，称为**不等式组的解集**.

探　究

求下列不等式组的解集，并探寻其中的规律.

(1) $\begin{cases} x > 1, \\ x > -3; \end{cases}$

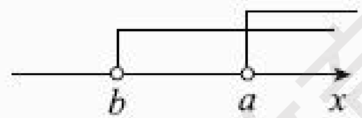
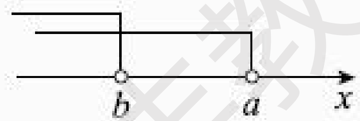
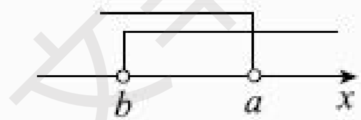
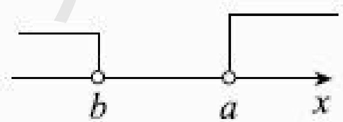
(2) $\begin{cases} x < 1, \\ x < -3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x > 1, \\ x < -3; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x < 1, \\ x > -3. \end{cases}$

归　纳

不等式组的解集($a>b$),见表 3-1.

不等式组	数轴表示	解集(公共部分)
$\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}$		$x>a$
$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$		$x<b$
$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$		$b<x<a$
$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$		无解

口诀:同大取大,同小取小,大小小大取中间,大大小小是无解.

归　纳

解一元一次不等式组的一般步骤为：

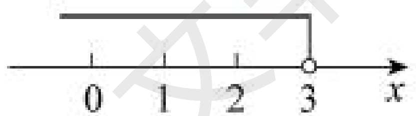
（1）分别解不等式组中的每一个不等式；

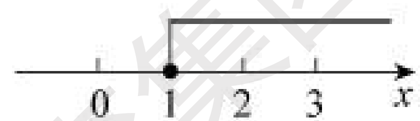
（2）将每一个不等式的解集在数轴上表示出来，找出它们的公共部分；

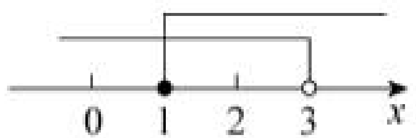
（3）根据找出的公共部分写出这个一元一次不等式组的解集（若没有公共部分，说明这个不等式组无解）.

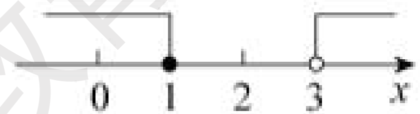
知识巩固

·例 1· 不等式组$\begin{cases}x<3\\x\geqslant 1\end{cases}$的解集在数轴上表示为(　　).

A. 

B. 

C. 

D. 

解：根据不等式组解集的定义，可知 C 选项正确.

·例 2· 解下列不等式组，并把解集在数轴上表示出来.

(1)$\begin{cases}3x-1>2x+1,\\2x>8;\end{cases}$　　(2)$\begin{cases}2x+3\geqslant x+11,\\\dfrac{2x+5}{3}-1<2-x.\end{cases}$

解：(1) 解不等式 $3x-1>2x+1$，　①

得 $x>2$；

解不等式 $2x>8$，　②

知识巩固

得 $x>4$，

把不等式 ① 和 ② 的解集表示在数轴上(图 3-11)，

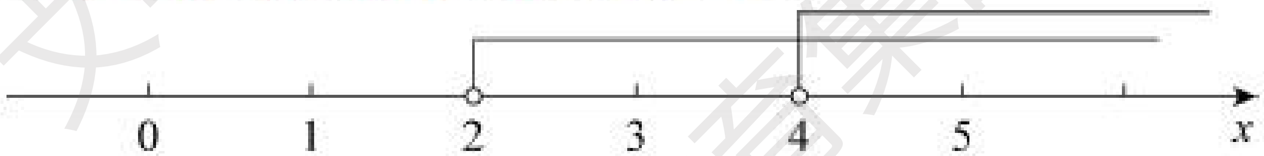


图 3-11

由图 3-11 可知不等式 ① 和 ② 的解集公共部分为 $x>4$，

故原不等式组的解集为 $x>4$.

(2) 解不等式 $2x+3\geqslant x+11$， ①

得 $x\geqslant 8$；

解不等式 $\dfrac{2x+5}{3}-1<2-x$， ②

得 $x<\dfrac{4}{5}$，

知识巩固

得 $x>4$，

把不等式 ① 和 ② 的解集表示在数轴上（图 3-11）.

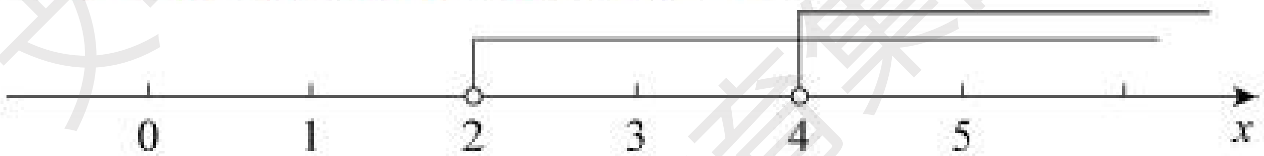


图 3-11

由图 3-11 可知不等式 ① 和 ② 的解集公共部分为 $x>4$，

故原不等式组的解集为 $x>4$.

（2）解不等式 $2x+3\geqslant x+11$， ①

得 $x\geqslant 8$；

解不等式 $\frac{2x+5}{3}-1<2-x$， ②

得 $x<\frac{4}{5}$，

知识巩固

把不等式 ① 和 ② 的解集表示在数轴上(图 3-12),

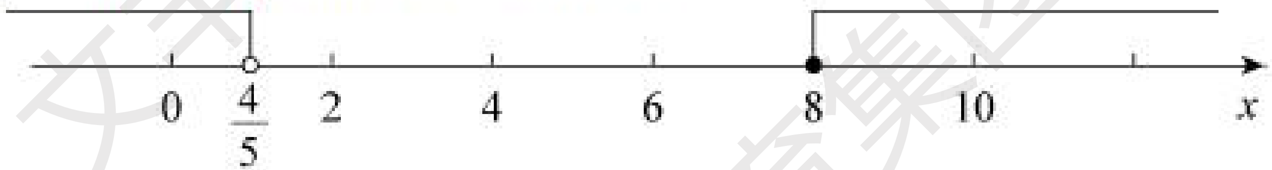


图 3-12

由图 3-12 可知不等式 ① 和 ② 的解集没有公共部分,

故原不等式组无解.

知识巩固

·例 3· 某校准备组织 290 名师生进行野外考察活动，行李共有 100 件. 学校计划租用甲、乙两种型号的汽车共 8 辆，经了解，甲种汽车每辆最多能载 40 人（不含司机）和 10 件行李，乙种汽车每辆最多能载 30 人（不含司机）和 20 件行李. 设租用甲种汽车 x 辆，请帮助学校设计所有可能的租车方案.

分析：设租用甲种汽车 x 辆，则租用乙种汽车 $(8-x)$ 辆. 根据两种汽车载人数量大于等于 290 人，行李数量大于等于 100 件，建立不等式组求解.

知识巩固

解：由题可知租用甲种汽车 x 辆，租用乙种汽车 $(8-x)$ 辆.

由题意得 $\begin{cases} 40x+30(8-x)\geqslant 290, \\ 10x+20(8-x)\geqslant 100. \end{cases}$

解得 $5\leqslant x\leqslant 6$，

因为 x 是非负的整数，

所以 $x=5$ 或 $x=6$，

即共有两种租车方案：

方案一：租用甲种汽车 5 辆，乙种汽车 3 辆；

方案二：租用甲种汽车 6 辆，乙种汽车 2 辆.

小　结

一、本章知识结构图

- 不等式与不等式组
  - 不等式
    - 不等式及其解集
    - 不等式的性质
    - 用作差法比较大小
  - 一元一次不等式
  - 一元一次不等式组

二、知识回顾

用数轴表示不等式(组)的解集时，要时刻牢记：大于向右画，小于向左画，有等号画实心圆点，无等号画空心圆圈.

不等式(组)是刻画不等关系的数学模型，它在实际生活中有广泛的应用.利用一元一次不等式或不等式组解决实际问题时，特别要注意结合实际意义对一元一次不等式或不等式组的解进行合理取舍，这是初学者易错的地方.注意积累利用一元一次不等式或不等式组解决实际问题的经验.