中华人民共和国教育部直属出版社
语文出版社
Language & Culture Press
www.ywcbs.com

初中升中职课程衔接

数学

第四章　函数

目录
CONTENTS

函数是中学数学中非常重要的一部分,函数的思想贯穿整个中学阶段,同时它也渗透在生活和生产的方方面面．例如,身高与年龄的关系,银行利息与存款时间的关系,水费与用水量的关系,出租车费与用时的关系,这些都可以看作是函数关系．

本章将重点介绍一次函数、正比例函数、反比例函数及二次函数的图像与性质,并介绍它们在实际生活中的应用．

如果你去买商品,你会选买哪一家呢?如果你是商场经理,如何定价才能使商场获得最大利润呢?

4.1 不等式

1．变量和函数

问题1

（1）商店销售某种瓶装饮料，售价每瓶为3元.设购买饮料x瓶，应付款y元，怎样用含有x的式子表示y？

（2）一根弹簧的原长为12 cm，若所挂重物（挂重）每增加2 kg就伸长1 cm，那么怎样用含挂重m(kg)的式子表示挂重后的弹簧长度l(cm)？

（3）当圆的半径r为5 cm时，圆的面积S为多少？半径为10 cm呢？怎样用含有圆半径r(cm)的式子表示圆面积$S(cm^2)$？

探　究

请指出上述各问题中，哪些是变量，哪些是常量.
每个问题中是否都有两个变量？它们有什么关系？

新知识

上述问题反映了不同事物的变化过程产生的数量关系，在这些数量关系中，有些量的数值是变化的，有些量的数值始终不变.在一个变化过程中，数值发生变化的量称为**变量**，数值始终不变的量称为**常量**.

问题2

（1）图 4-1 是我国人均 GDP 随时间变化的趋势图.

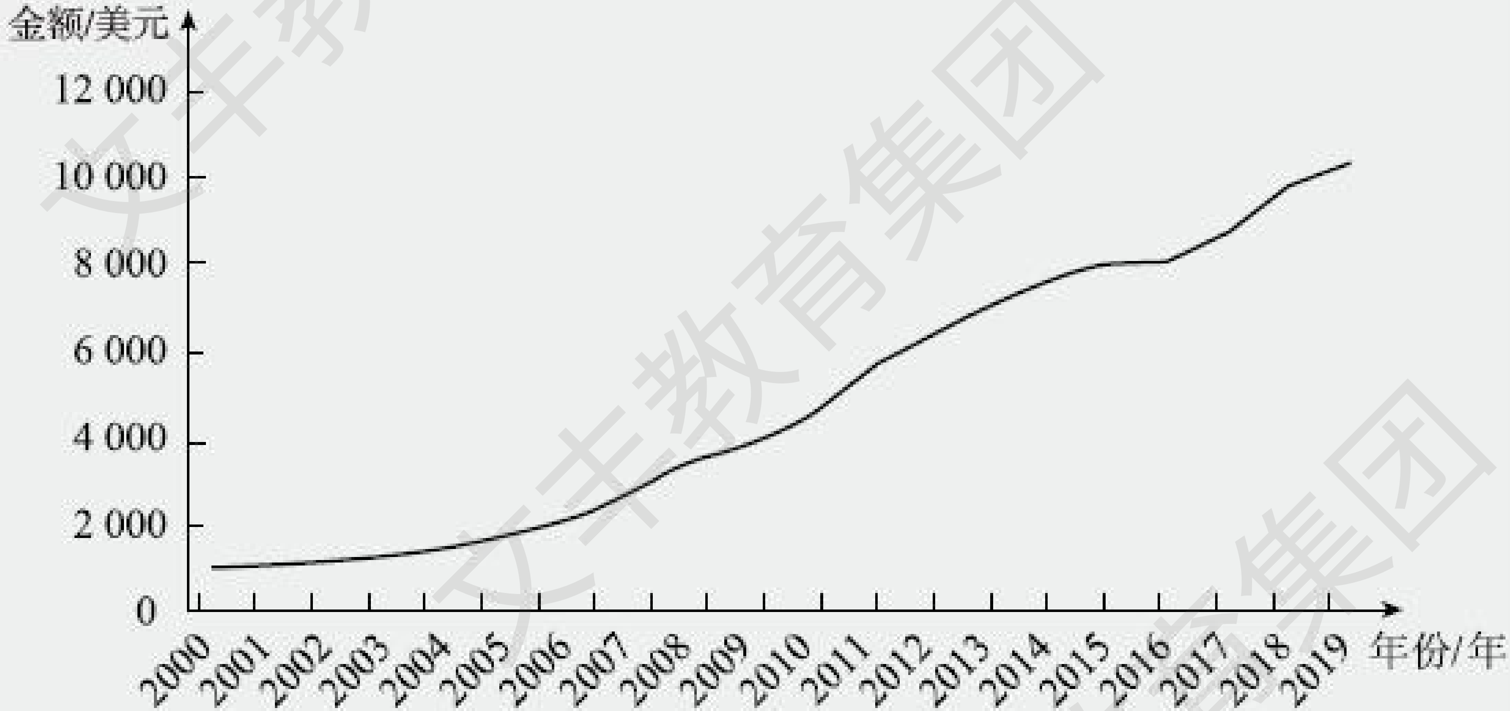


图 4-1

如果用 t 表示时间，y 表示我国人均 GDP，那么对于每一个确定的 t 的值，是否都有唯一确定的 y 的值与之对应？

(2) 某市 3 月 21 日至 3 月 27 日的最高气温统计表，见表 4-1．日期和最高气温可以记作两个变量 x 与 y，对于表中每一个确定日期 x，都对应着一个确定的最高气温 y 吗？

表 4-1

日期 / 日	21	22	23	24	25	26	27
最高气温 /℃	16	18	19	23	23	21	22

知识巩固

例1 下列式子中的 y 是 x 的函数吗？为什么？若 y 不是 x 的函数，怎样改变，才能使 y 是 x 的函数？

①$y=2x-3$；②$y=\dfrac{2}{x-1}$；③$y=\pm\sqrt{x+2}$.

解：①和②中 y 是 x 的函数，因为对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应；③中 y 不是 x 的函数，因为对于 x 的每一个确定的值，y 都有两个确定的值与其对应. 将关系式改为 $y=\sqrt{x+2}$ 或 $y=-\sqrt{x+2}$，都能使 y 是 x 的函数.

知识巩固

·例 2· 在一次实验中，一位同学把一根弹簧的上端固定，在其下端悬挂物体.已知该弹簧的极限挂重是 15 kg，下面是测得的弹簧的长度 y 与所挂物体质量 x 的一组对应值(表 4-2).

表 4-2

x/kg	0	1	2	3	4	5
y/cm	18	20	22	24	26	28

(1) 写出表示 y 与 x 的函数关系的式子；

(2) 指出自变量 x 的取值范围；

(3) 求弹簧长 36 cm 时所挂物体的质量.

解：(1) 所挂物体质量 x 是自变量，弹簧长度 y 是 x 的函数，它们的关系为 $y = 2x + 18$.

(2) 仅从式子 $y = 2x + 18$ 看，x 可以取任意实数，但是考虑到 x 代表的实际意义为所挂物体质量，因此 x 不能取负数.同时，它不能超过极限挂重 15 kg，因此，自变量 x 的取值范围为 $0 \leqslant x \leqslant 15$.

知识巩固

(3) 将 $y=36$ 代入 $y=2x+18$，得 $36=2x+18$，故 $x=9$.

所以当弹簧长 36 cm 时，所挂物体的质量为 9 kg.

像 $y=2x+18$ 这样，用关于自变量的数学式子表示函数与自变量之间的关系，是描述函数的常用方法，这种式子称为**函数的解析式**.

注意：确定函数自变量取值范围时，不仅要考虑使函数关系式有意义，而且还要注意问题的实际意义.

2．函数的图像

用图像表示函数可以直观地表示出两个变量之间的关系，如图 4-1 反映的我国人均 GDP 随时间的增长呈现升高的趋势，下面就来作出函数 $y=2x$ 的图像.

1.分别选择若干对自变量与函数的对应值，列成下表（表 4-3）：

表 4-3

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-4	-2	0	2	4	…

2.分别以表 4-3 中的 x 值作点的横坐标，对应的 y 值作纵坐标得到点：…，$(-2,-4)$，$(-1,-2)$，$(0,0)$，$(1,2)$，$(2,4)$，…

2．函数的图像

3.作图如下(图 4-2)：

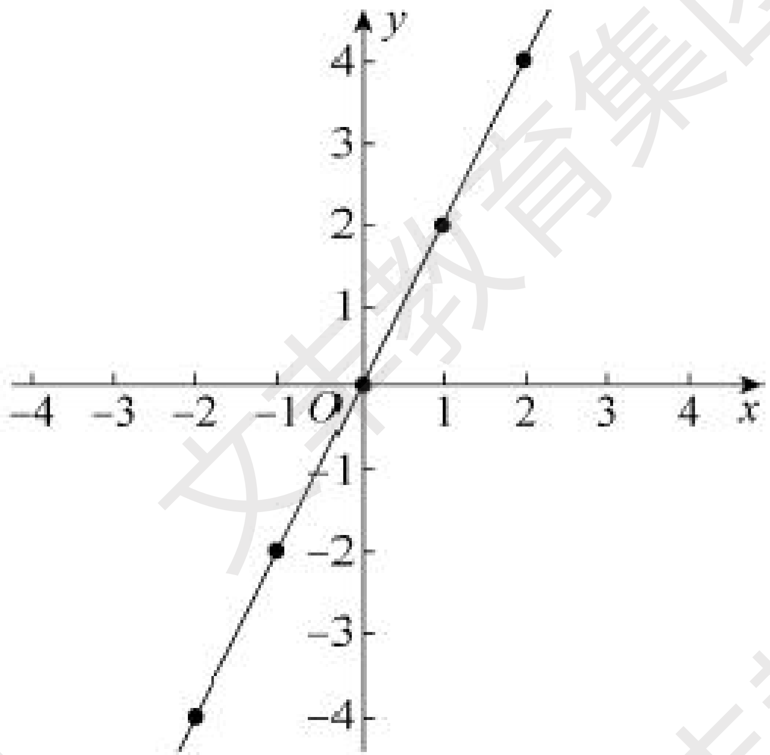


图 4-2

新 知 识

一般地,对于一个函数,如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标,那么坐标平面内由这些点组成的图形,就是**这个函数的图像**.

归 纳

1.描点法画函数图像的一般步骤如下:

第一步,列表 —— 表中给出一些自变量的值及其对应的函数值;

第二步,描点 —— 在直角坐标系中,以自变量的值为横坐标,相应的函数值为纵坐标,描出表格中数值对应的各点;

第三步,连线 —— 按照横坐标由小到大的顺序,把所描出的各点用平滑曲线连接起来.

2.函数图像与函数解析式之间的联系:

(1)图像上每一个点的横坐标都是自变量的一个取值,纵坐标是相应的函数值,它们满足函数关系式;

(2)以符合函数解析式的任意一对自变量取值和相应的函数值为坐标而得到的点,都在函数图像上.

知识巩固

·例 3· 如图 4-3 所示，该图像（折线 $ABCDE$）描述了一辆汽车在某一直线上的行驶过程中，汽车离出发地的距离 s（km）与行驶时间 t（h）之间的对应关系.

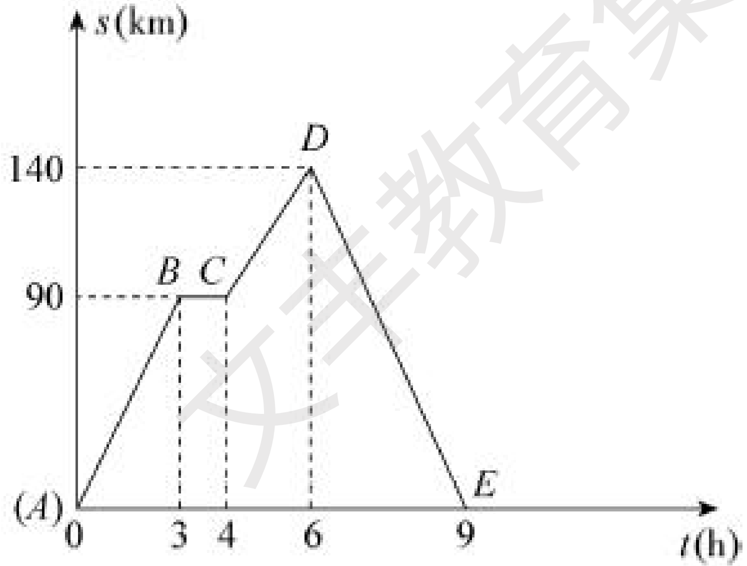


图 4-3

知识巩固

根据图像回答下列问题：

(1) 本题哪个是自变量？哪个是自变量的函数？

(2) 汽车共行驶了多少路程？

(3) 汽车在中途停留了多长时间？

(4) 汽车在整个行驶过程中(不算停留)的平均速度是多少？

解：(1) 行驶时间 t 是自变量，距离 s 是行驶时间 t 的函数.

(2) 从图像中可以看出：汽车从出发地到目的地走了 140 km，后又回到出发地，因而共行驶了 280 km.

(3) 由图像中平行于 x 轴的线段可知，$4-3=1$(h)，汽车在行驶途中停留了 1 h.

(4) 汽车在整个行驶过程中，行驶的总时间为 $9-1=8$(h)，距离为 280 km，故平均速度为 $280\div 8=35$(km/h).

知识巩固

·例 4· 画出下列函数的图像：

(1) $y=2x+1$；　　(2) $y=-x+3$.

解：(1) 从式子 $y=2x+1$ 可以看出，x 取任意实数时这个式子都有意义，所以 x 的取值范围是全体实数.

从 x 的取值范围中选取一些数值，算出 y 的对应值，列表如下(表 4-4)：

表 4-4

x	…	-1	0	1	2	…
y	…	-1	1	3	5	…

根据表中数值描点 (x,y)，并用平滑曲线连接这些点(图 4-4).

知识巩固

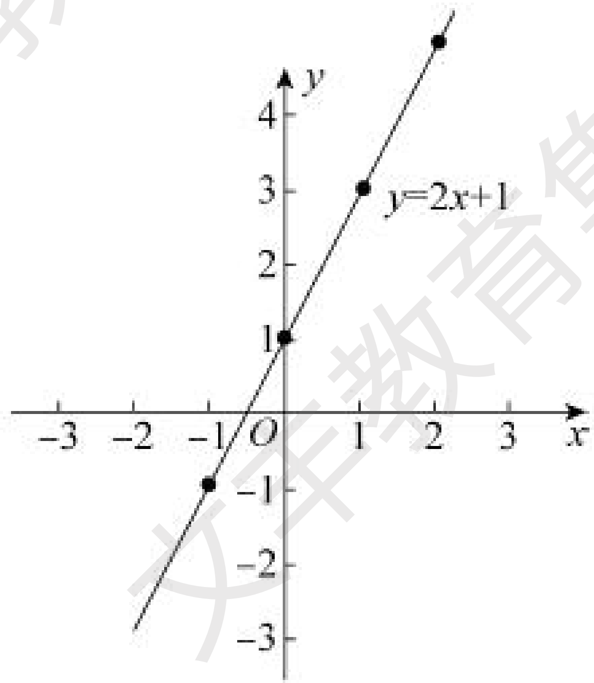


图 4-4

从函数图像可以看出，直线从左至右上升，即当 x 由小变大时，$y=2x+1$ 随之增大.

知识巩固

(2) 作 $y=-x+3$ 的函数图像.

列表(表 4-5):

表 4-5

x	…	-1	0	1	2	…
y	…	4	3	2	1	…

根据表中数值描点(x,y),并用平滑曲线连接这些点(图 4-5).

知识巩固

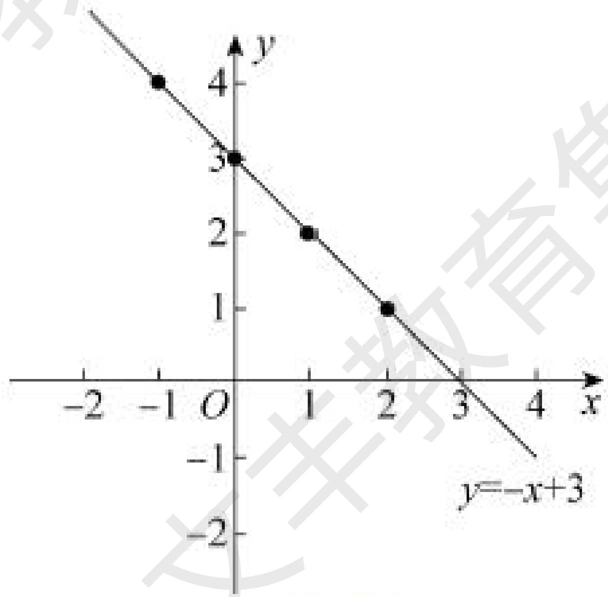


图 4-5

从函数图像可以看出，直线从左至右下降，即当 x 由小变大时，$y=-x+3$ 随之减小.

由上可知，函数的表示方法有解析式法、图像法和列表法.

4.2 一次函数

1．正比例函数

探　究

观察下面的函数解析式，它们有什么共同点？

(1) $y=3x$；(2) $s=60t$；(3) $l=2\pi R$；(4) $c=4a$．

新 知 识

上面这些函数都是常数与自变量的积的形式．

一般地，形如 $y=kx$ (k 是常数，$k\neq 0$) 的函数，称为**正比例函数**，其中 k 称为**比例系数**．在这里需要注意：(1) $k\neq 0$，(2) x 的次数是 1．

探　　究

观察如图 4-6 所示的两个正比例函数的图像，它们之间有什么相同点和不同点？

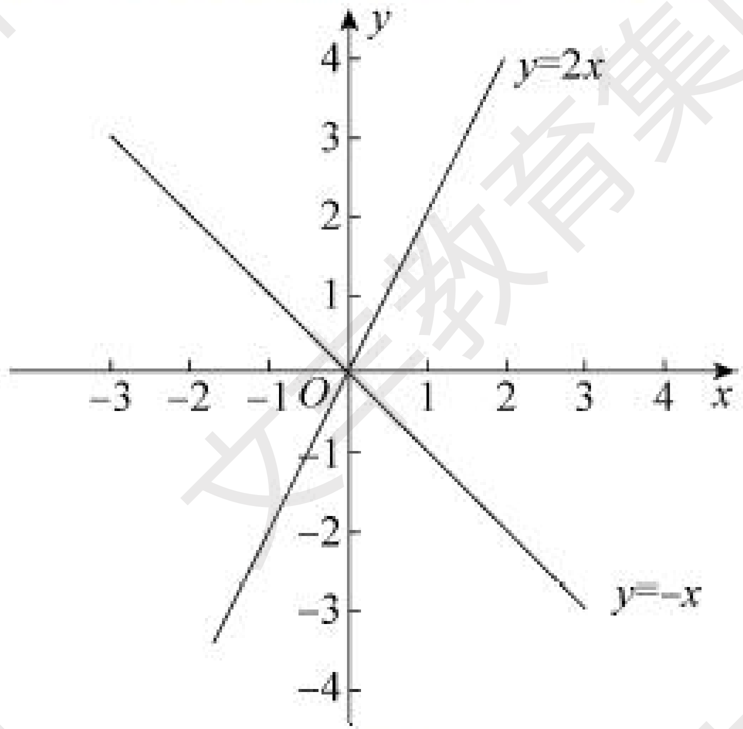


图 4-6

新 知 识

由前面的探究可知，正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq 0$）的图像是一条经过原点的直线。当 $k>0$ 时，直线 $y=kx$ 经过第一、三象限，从左向右直线上升，即随着 x 的增大 y 也增大；当 $k<0$ 时，直线 $y=kx$ 经过第二、四象限，从左向右直线下降，即随着 x 的增大 y 减小。

探　究

如何快速地画出正比例函数的图像？

新 知 识

已知两点确定一条直线，正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$ 的图像过坐标原点 O，故只要再找出一个有别于坐标原点的点 $P(x_0,kx_0)(x_0\neq 0)$，便可画出正比例函数的图像，即过点 O 与点 P 的直线就是正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$ 的图像.

2．一次函数的相关概念

探　究

完成下列问题：

(1) 某地手机通话费为 0.2 元/min. 小明买了一张存入了 50 元的手机卡，则话费余额 w(元) 与手机通话时间 t (min) 的函数关系式为__________.

(2) 请写出 n 边形的内角和 m(单位：度) 与其边数 n 的函数关系式__________.

(3) 容积为 30 m^3 的水池中已有水 10 m^3，现在以 5 m^3/min 的速度向水池注水，请写出水池中水的容积 y(m^3) 与注水时间 x(min) 之间的函数关系式__________.

观察上面问题中的函数关系式与正比例函数有什么区别，这些函数关系式之间有什么共同点和不同点.

新 知 识

一般地，形如 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的函数，称为**一次函数**.特别地，当 $b=0$ 时，一次函数是正比例函数，所以说正比例函数是一种特殊的一次函数.

知识巩固

·例 1· 下列函数关系式中，哪些是一次函数，哪些是正比例函数？

①$y=-x-2$；②$y=5x^2-1$；③$y=-3x$；④$y=-\dfrac{1}{x}$.

解：① 是一次函数，不是正比例函数；

② 和 ④ 既不是一次函数也不是正比例函数；

③ 既是一次函数也是正比例函数.

知识巩固

·例 2· 已知一次函数的图像过$(-1,-7)$,$(3,1)$两点,求该一次函数的解析式.

分析:求一次函数$y=kx+b$的解析式,关键是求出k,b的值,从已知条件可以列出关于k,b的二元一次方程组,求出k,b.

解:设这个一次函数的解析式为$y=kx+b(k\neq 0)$,

因为$y=kx+b$的图像过点$(-1,-7)$,$(3,1)$,所以

$$\begin{cases}-7=-k+b,\\1=3k+b,\end{cases}$$

解方程组得:$\begin{cases}k=2,\\b=-5,\end{cases}$

这个一次函数的解析式为$y=2x-5$.

3．一次函数的图像和性质

探　究

观察下列两个函数的图像(图 4-7)，给出观察结果：

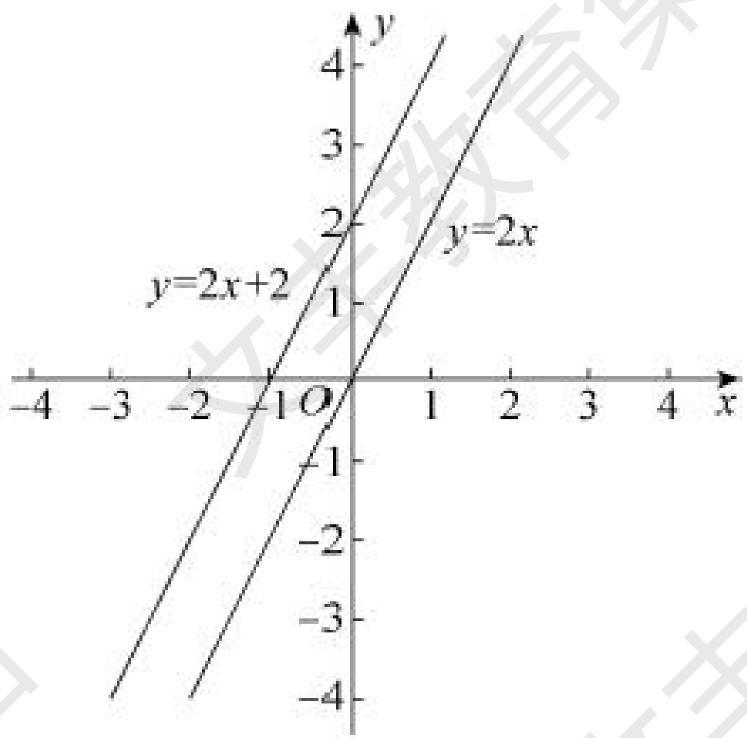


图 4-7

探　究

相同点：这两个函数的图像形状都是________，并且倾斜程度________.

不同点：函数 $y=2x$ 的图像过原点，函数 $y=2x+2$ 的图像与 y 轴交于点________.

联系：一次函数 $y=2x+2$ 的图像可以看作由直线 $y=2x$ 向________平移________个单位长度而得到.

新 知 识

比较一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 与正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$ 的解析式，容易得出：

一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图像可以由直线 $y=kx$ 平移 $|b|$ 个单位长度得到(当 $b>0$ 时，向上平移；当 $b<0$ 时，向下平移).一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图像也是一条直线，称它为直线 $y=kx+b$.

探　究

观察函数 $y=x-1$ 与 $y=-x+1$ 的图像（图 4-8），能发现什么规律？

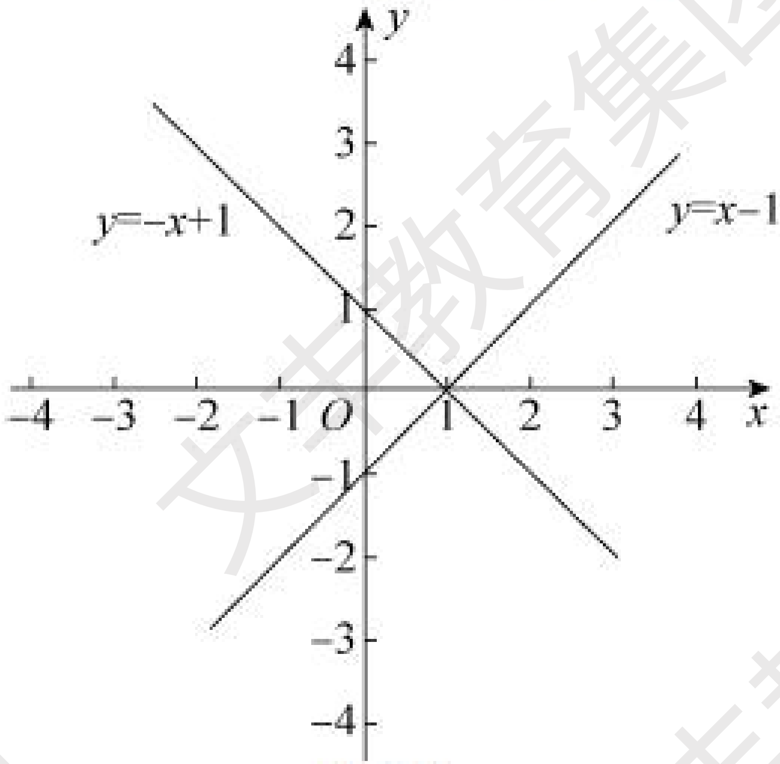


图 4-8

新 知 识

观察图 4-8 中一次函数的图像，可以发现以下规律：

当 $k>0$ 时，直线 $y=kx+b$ 从左向右上升；

当 $k<0$ 时，直线 $y=kx+b$ 从左向右下降．

由此可见，一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）具有如下性质：

（1）当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；

（2）当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小．

探　　究

画一次函数图像时，怎样画最简单？为什么？

新 知 识

因为一次函数的图像是直线，所以可用两点法画一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）的图像．一般地，过点 $(0,b)$ 和点 $\left(-\frac{b}{k},0\right)$（$k$，$b$ 是常数，$k\neq0$）的直线，即一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）的图像．

4．一次函数与方程、不等式

方程、不等式与函数之间有着密切的联系.下面先从函数的角度解一元一次方程.

探　究

1.解下列一元一次方程：

(1)$2x-1=3$；　(2)$2x-1=-3$.

2.观察下图(图 4-9)，能发现什么？

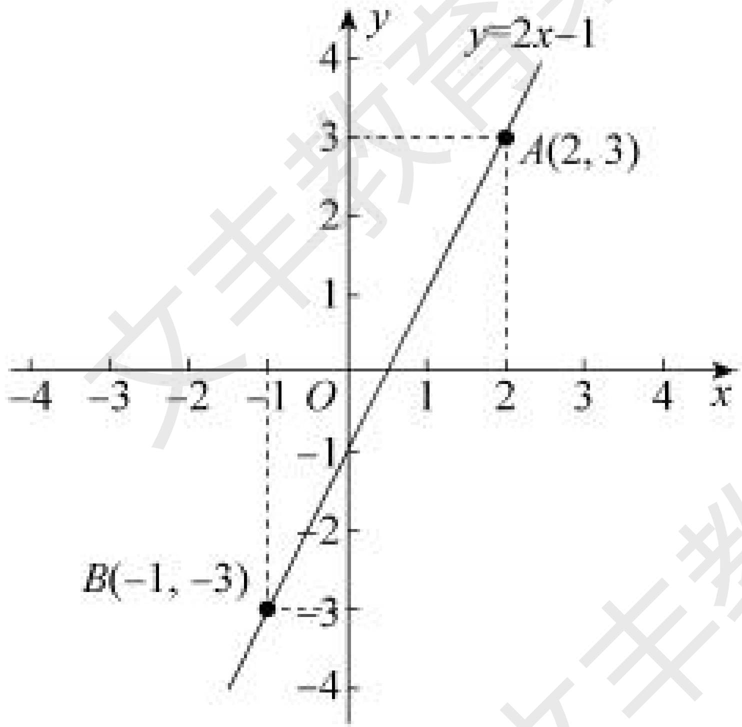


图 4-9

新 知 识

观察图像可以看出：一次函数 $y=2x-1$ 图像上 A 点和 B 点的横坐标恰好是上面两个方程的解.

因为任何一个以 x 为未知数的一元一次方程都可以变形为 $ax+b=0(a\neq 0)$ 的形式，所以解一元一次方程相当于某个一次函数 $y=ax+b$ 的函数值为 0 时，求自变量 x 的值.

再从函数的角度解一元一次不等式.

探　究

1.解下列不等式：

(1)$2x+3<-1$；　　(2)$2x+3>3$.

2.观察下图(图 4-10)，能发现什么？

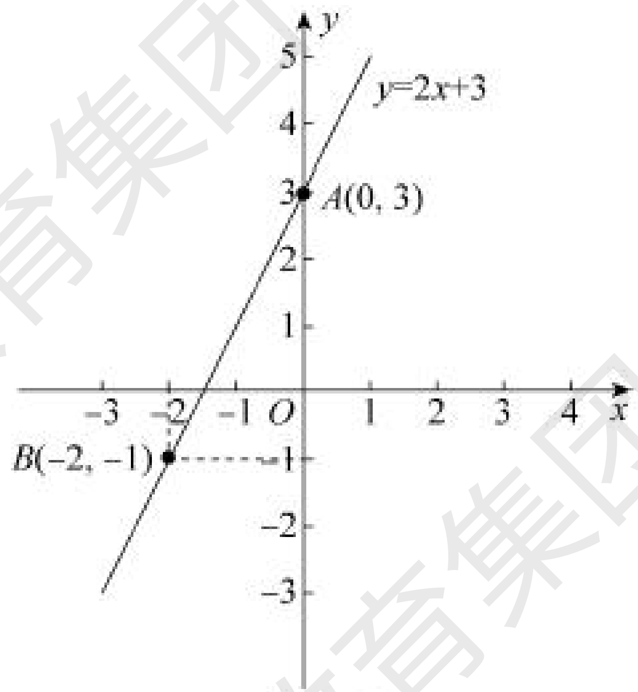


图 4-10

新 知 识

观察图像可以看出：B 点下方所有点的横坐标均满足(1)式的解集，A 点上方所有点的横坐标均满足(2)式的解集，因此解这两个不等式相当于在一次函数 $y=2x+3$ 的函数值分别小于-1、大于 3 时，求自变量 x 的取值范围.或者说，在直线 $y=2x+3$ 上取纵坐标满足小于-1、大于 3 的点，看它们的横坐标满足什么条件.

因为任何一个以 x 为未知数的一元一次不等式都可以变形为 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0(a\neq 0)$ 的形式，所以解一元一次不等式相当于在某个一次函数 $y=ax+b$ 的函数值大于 0 或者小于 0 时，求自变量 x 的取值范围.

最后，从函数的角度解二元一次方程组.

归　纳

一般地，因为每个含有未知数 x 和 y 的二元一次方程，都可以改写为 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的形式，所以每个这样的方程都对应一个一次函数，于是也对应一条直线.这条直线上每个点的坐标（x，y）都是这个二元一次方程的解.

综上可知，每个由含有未知数 x 和 y 的两个二元一次方程组成的二元一次方程组，都对应两个一次函数，于是也对应两条直线.从"数"的角度看，解这样的方程组，相当于求自变量为何值时相应的两个函数值相等，以及这个函数值是多少；从"形"的角度看，解这样的方程组，相当于确定两条相应直线交点的坐标.因此，可以用画一次函数图像的方法得到方程组的解.

方程（组）与函数之间互相联系，从函数的角度可以把它们统一起来.解决问题时，应根据具体情况灵活地把它们结合起来考虑.

4.3 反比例函数

1．反比例函数的相关概念

探　　究

完成下列问题：

(1) 商场推出分期付款购买电脑活动，每台电脑 5 000 元，首付 1 300 元，以后每月付 y 元，x 个月全部付清，则 y 与 x 的关系式为______________.

(2) 某种灯的使用寿命为 1 000 小时，它的使用天数 y 与平均每天使用的小时数 x 之间的关系式为______________.

(3) 某工人承包运输粮食的总数是 125 t，每天运 x t，共运了 y 天，则 y 与 x 的关系式为______________.

上述问题中的各个函数关系式分别为(1) $y=\dfrac{3700}{x}$，(2) $y=\dfrac{1000}{x}$，(3) $y=\dfrac{125}{x}$.

观察上述问题中各个函数关系式有什么共同特点.

新 知 识

从上述问题可以看出，这些函数关系式都可以抽象地表示为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的形式.

一般地，把形如 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq0$）的函数称为**反比例函数**，其中 x 是自变量，y 是函数.自变量 x 的取值范围是不等于 0 的一切实数.

·例 1· (1) 已知 y 与 x 成反比例关系，当 $x=3$ 时，$y=4$，那么 $y=3$ 时，$x=$(　　).

A.4　　B.-4　　C.3　　D.-3

(2) 下列各函数：①$y=x+1$；②$y=-\frac{3}{x}$；③$y=\frac{3}{5x}$；④$y=\frac{4}{x+1}$；⑤$y=-\frac{1}{2}x$；⑥$y=2x$.其中，是 y 关于 x 的反比例函数的有____（填序号）.

解：(1) 设 $y=\frac{k}{x}$，则依题意有 $4=\frac{k}{3}$，得 $k=12$，即 $y=\frac{k}{x}$.

故当 $y=3$ 时，$x=4$，因此选 A.

(2) 由反比例函数的解析式特征可知，反比例函数为 ② 和 ③.

归　纳

·例1· (1) 已知 y 与 x 成反比例关系，当 $x=3$ 时，$y=4$，那么 $y=3$ 时，$x=$(　　).

A. 4　　B. -4　　C. 3　　D. -3

(2) 下列各函数：① $y=x+1$；② $y=-\frac{3}{x}$；③ $y=\frac{3}{5x}$；④ $y=\frac{4}{x+1}$；⑤ $y=-\frac{1}{2}x$；⑥ $y=2x$. 其中，是 y 关于 x 的反比例函数的有____(填序号).

解：(1) 设 $y=\frac{k}{x}$，则依题意有 $4=\frac{k}{3}$，得 $k=12$，即 $y=\frac{k}{x}$，

故当 $y=3$ 时，$x=4$，因此选 A.

(2) 由反比例函数的解析式特征可知，反比例函数为 ② 和 ③.

2．反比例函数的图像和性质

探　究

用“描点”的方法，画出反比例函数的图像，并利用图像研究反比例函数的性质.

画出反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 与 $y=-\frac{6}{x}$ 的图像.

解：列表表示几组 x 与 y 的对应值(表 4-6)：

表 4-6

x	-6	-4	-2	2	4	6
$y=\frac{6}{x}$	-1	-1.5	-3	3	1.5	1
$y=-\frac{6}{x}$	1	1.5	3	-3	-1.5	-1

描点连线：以表中各对对应值为坐标，描出各点，并用平滑的曲线顺次连接这些点，就得到函数 $y=\frac{6}{x}$ 与 $y=-\frac{6}{x}$ 的图像(图 4-12).

探　究

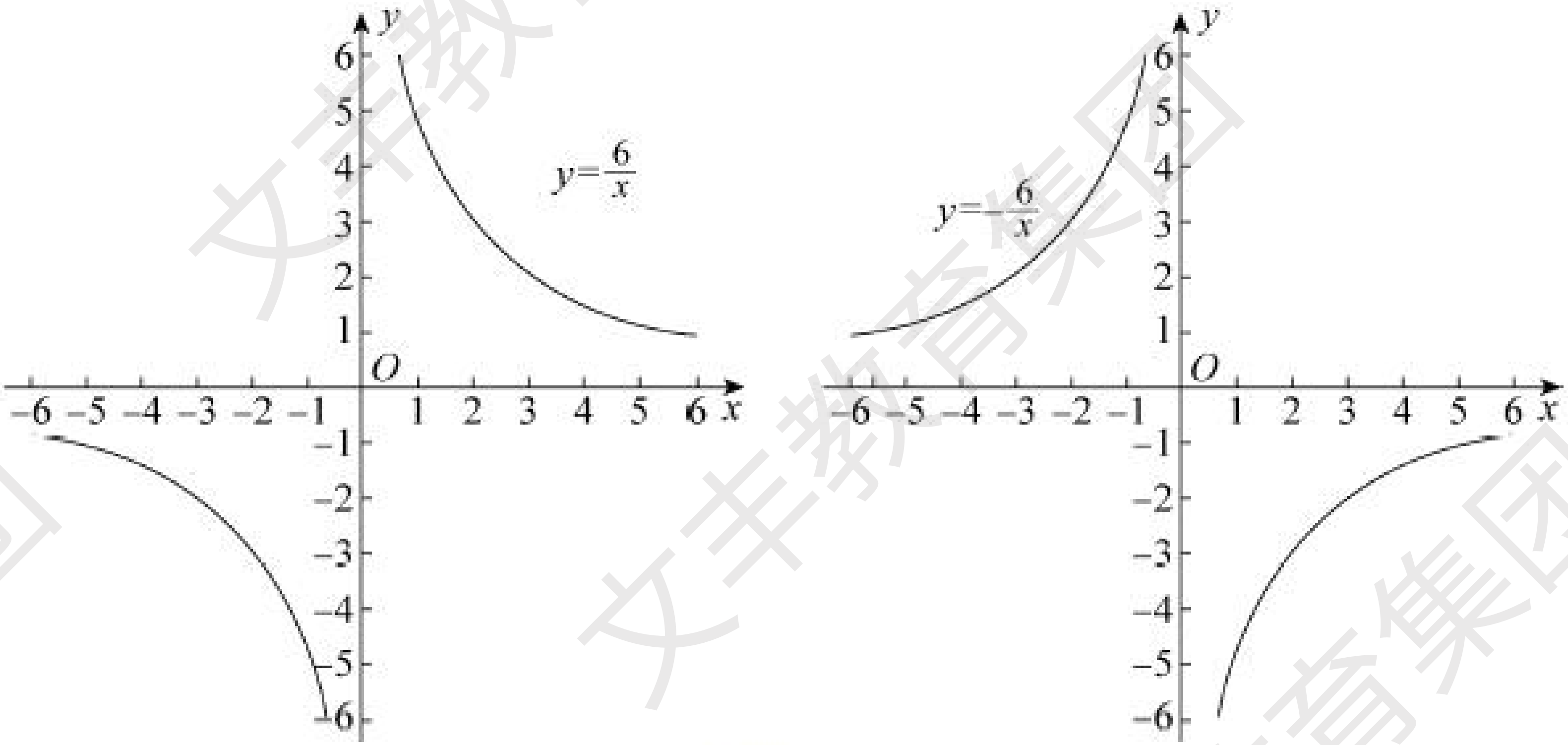
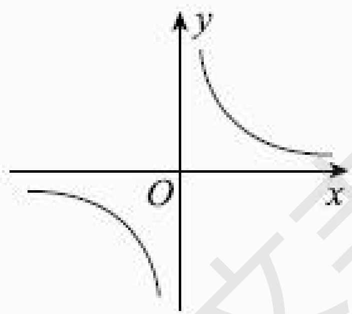
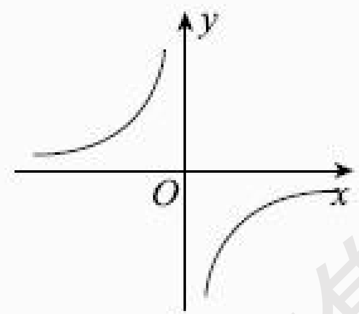


图 4-12

新 知 识

通过观察图 4-12 可以得出反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图像与性质，见表 4-7：

表 4-7　反比例函数的图像与性质

k 的符号	$k>0$	$k<0$
图像		
性质	图像的两个分支在第一、三象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小	图像的两个分支在第二、四象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大

知识巩固

·例 2· 已知点 $P(2,-5)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图像上，

(1) 当 $x=-3$ 时，求 y 的值；

(2) 当 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时，求 y 的取值范围.

解：(1) 由题可知 $-5=\frac{k}{2}$，得 $k=-10$，即 $y=-\frac{10}{x}$，

当 $x=-3$ 时，$y=\frac{10}{3}$.

(2) 当 $x=1$ 时，$y=-10$；当 $x=3$ 时，$y=-2$.

因为函数在第四象限 y 随 x 的增大而增大，所以 y 的取值范围是 $-10\leqslant y\leqslant -2$.

4.4 二次函数

1．二次函数的概念

探　究

(1) 若圆的半径为 x cm，面积为 y cm^2，则 y(cm^2) 与 x(cm) 之间的函数关系如何表示？

(2) 用周长为 20 m 的篱笆围成矩形场地，场地面积 y(m^2) 与矩形一边长 x(m) 之间的关系是什么？

(3) 农机厂第一个月水泵的产量为 50 台，第三个月的产量 y(台) 与月平均增长率 x 之间的函数关系如何表示？

上述问题中的各个函数关系式分别为(1)$y=\pi x^2$；(2)$y=x(10-x)=-x^2+10x$；(3)$y=50(1+x)^2$.

观察上面三个函数解析式，他们有什么共同特点？

可以发现这三个函数关系式都是关于自变量 x 的二次式.

新 知 识

一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq 0$）的函数，称为**二次函数**.其中 x 是自变量，a，b，c 分别是函数解析式的二次项系数、一次项系数和常数项.

2．二次函数的图像和性质

结合图像讨论性质是数形结合地研究函数的重要方法.现在从最简单的二次函数 $y=x^2$ 开始，逐步深入地讨论一般二次函数的图像和性质.

先列表表示几组 x 与 y 的对应值(表 4-8)，再以表中各对对应值为坐标，用平滑的曲线连接这些点，画出二次函数 $y=x^2$ 的图像(图 4-13).

表 4-8

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

可以看出，二次函数的图像是一条曲线，它的形状类似于投篮时球在空中所经过的路线，只是这条曲线开口向上. 实际上，二次函数的图像都是抛物线，它们的开口或者向上或者向下.

2．二次函数的图像和性质

一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像称为抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

可以看出，y 轴是抛物线 $y=x^2$ 的对称轴，抛物线 $y=x^2$ 与它的对称轴的交点(0,0)称为抛物线的顶点，它是抛物线 $y=x^2$ 的最低点.

实际上，每条抛物线都有对称轴，抛物线与对称轴的交点称为抛物线的顶点.抛物线的顶点是抛物线的最高点或最低点.

从二次函数 $y=x^2$ 的图像还可以看出：在对称轴的左侧，抛物线从左到右下降；在对称轴右侧，抛物线从左到右上升.即当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

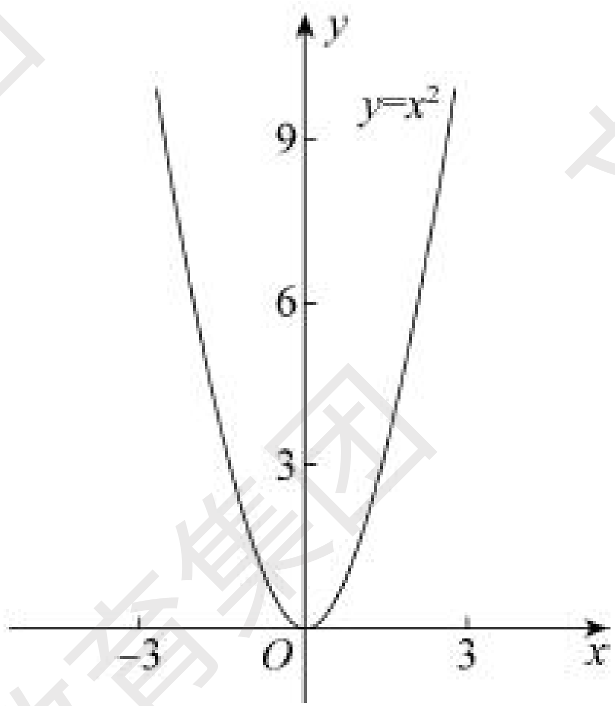


图 4-13

2．1　二次函数$y=ax^2$的图像和性质

探　究

在同一直角坐标系中，画出函数$y=\frac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$的图像.

分别列表（表4-9），再画出它们的图像（图4-14）.

表4-9

x	…	-4	-2	0	2	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	8	2	0	2	8	…
x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=2x^2$	…	8	2	0	2	8	…

探　究

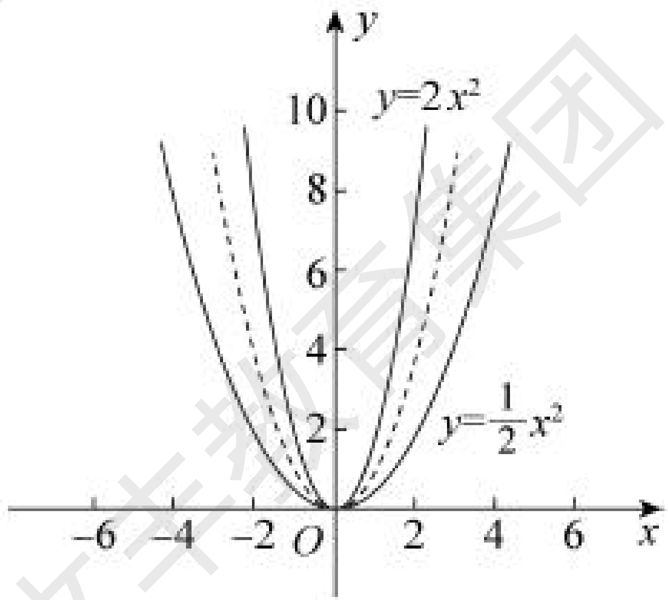


图 4-14

(1) 函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$ 的图像与 $y=x^2$ 的图像对比，有什么共同点和不同点？

(2) 当 $a>0$ 时，二次函数 $y=ax^2$ 的图像有什么特点？

新 知 识

一般地，当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 的开口向上，对称轴是 y 轴，顶点是原点，顶点是抛物线的最低点，a 越大，抛物线的开口越小.

探 究

探　　究

(1) 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=-x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=-2x^2$ 的图像，并考虑这些图像有什么共同点和不同点(图 4-15)．

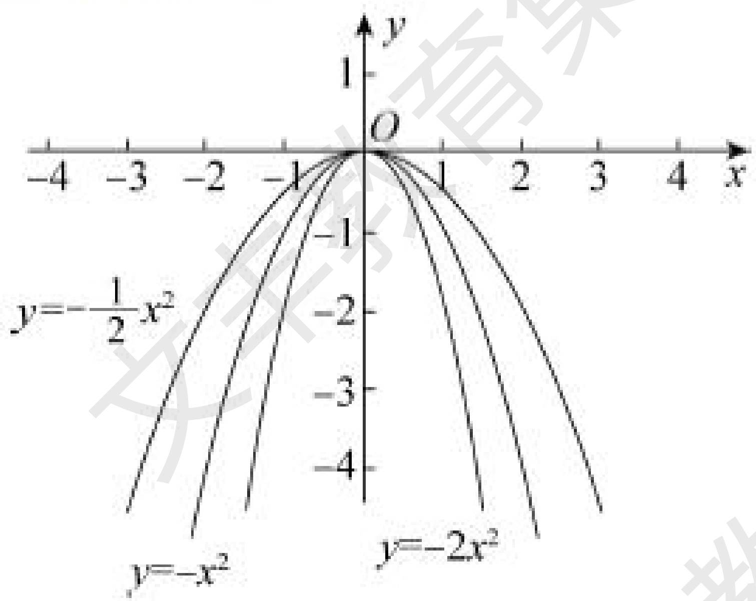


图 4-15

(2) 当 $a<0$ 时，二次函数 $y=ax^2$ 的图像有什么特点？

新 知 识

一般地,当 $a<0$ 时,抛物线 $y=ax^2$ 的开口向下,对称轴是 y 轴,顶点是原点,顶点是抛物线的最高点,a 越小,抛物线的开口越小.

归 纳

一般地,抛物线 $y=ax^2$ 的对称轴是 y 轴,顶点是原点.当 $a>0$ 时,抛物线的开口向上,顶点是抛物线的最低点;当 $a<0$ 时,抛物线的开口向下,顶点是抛物线的最高点.对于抛物线 $y=ax^2$,$|a|$ 越大,抛物线的开口越小.

从二次函数 $y=ax^2$ 的图像可以看出:如果 $a>0$,当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小;当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而增大;如果 $a<0$,当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小.

2．2　二次函数y ＝ax２ ＋k, y ＝a （x －h）２ 的图像和性质

探　究

在同一直角坐标系中，画出二次函数 $y=2x^2+1$，$y=2x^2-1$ 的图像．

先列表(表 4-10)：

表 4-10

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=2x^2+1$	…	9	3	1	3	9	…
$y=2x^2-1$	…	7	1	-1	1	7	…

探　　究

然后描点画图，得到函数图像(图 4-16).

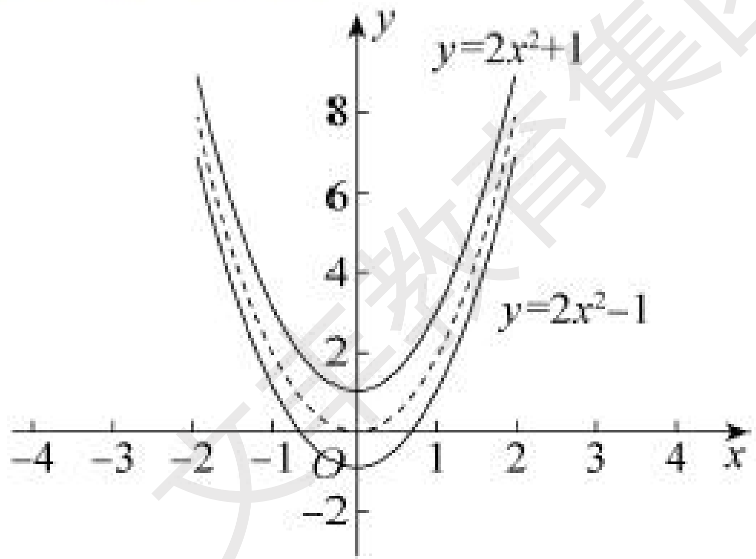


图 4-16

(1) 抛物线 $y=2x^2+1$, $y=2x^2-1$ 的开口方向，对称轴和顶点坐标各是什么？

(2) 抛物线 $y=2x^2+1$, $y=2x^2-1$ 与抛物线 $y=2x^2$ 有什么关系？

新 知 识

把抛物线 $y=2x^2$ 向上平移一个单位长度，就得到抛物线 $y=2x^2+1$；把抛物线 $y=2x^2$ 向下平移一个单位长度，就得到抛物线 $y=2x^2-1$.

探 究

在同一直角坐标系中，画出二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$，$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像，并分别指出它们的开口方向、对称轴和顶点.

先分别列表(表 4-11)：

探　究

表 4-11

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	…
$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$	…	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	…
x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$	…	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	…

然后描点画图，得到图像(图 4-17).

探　究

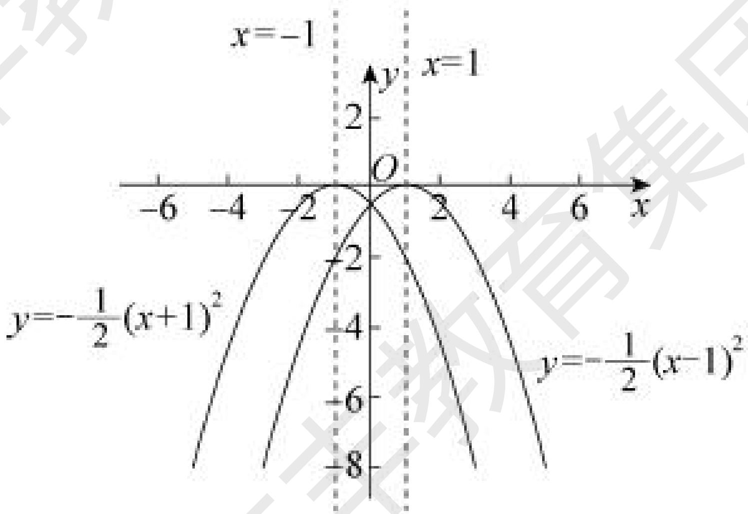


图 4-17

可以看出，抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的开口向下，对称轴是经过点 $(-1,0)$ 且与 x 轴垂直的

探　究

直线，把它记作 $x=-1$，顶点是 $(-1,0)$；抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的开口向下，对称轴是 $x=1$，顶点是 $(1,0)$.

1.抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 有什么关系？

2.(1) 抛物线 $y=ax^2+k$ 与抛物线 $y=ax^2$ 有什么关系？

(2) 抛物线 $y=a(x-h)^2$ 与抛物线 $y=ax^2$ 有什么关系？

新 知 识

把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位长度，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$；把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 1 个单位长度，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$.

归 纳

1.当 $k>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+k$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 向上平移 $|k|$ 个单位得到；当 $k<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+k$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 向下平移 $|k|$ 个单位得到.

2.当 $h>0$ 时，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 向右平移 $|h|$ 个单位得到；当 $h<0$ 时，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 向左平移 $|h|$ 个单位得到.

2．3　二次函数y =a（x －h）2 －k 的图像和性质

探　究

画出函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的图像，并指出它的开口方向，对称轴和顶点. 怎样移动抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 就可以得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$？

函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的图像如图 4-18 所示.

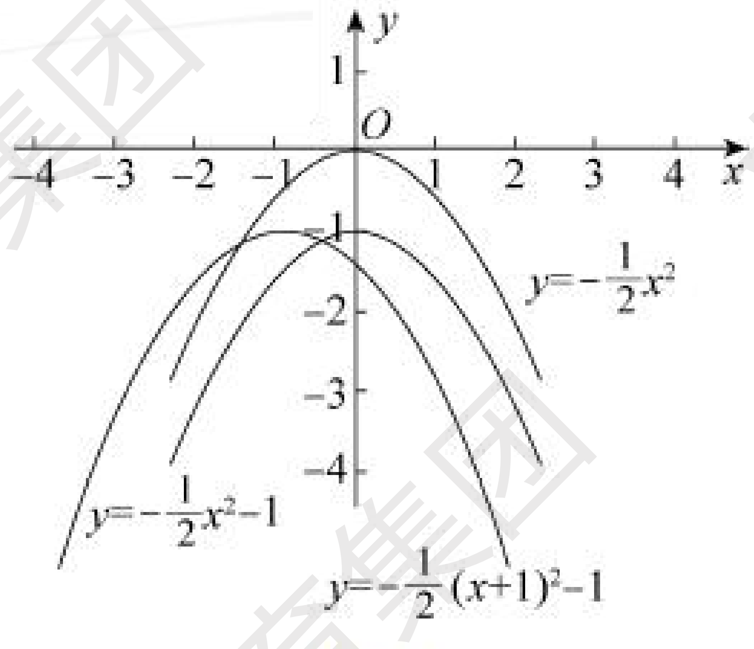


图 4-18

抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的开口向下，对称轴是 $x=-1$，顶点是$(-1,-1)$.

新 知 识

把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向下平移 1 个单位长度，再向左平移 1 个单位长度，就得到抛物线

$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$.

归　纳

一般地，抛物线 $y=a(x-h)^2-k$ 与 $y=ax^2$ 形状相同，位置不同. 把抛物线 $y=ax^2$ 向上(下)向左(右)平移，可以得到抛物线 $y=a(x\pm h)^2\pm k(h>0,k>0)$.

平移的方向、距离根据 h，k 的值决定.

抛物线 $y=a(x-h)^2-k$ 有如下特点：

(1) 当 $a>0$ 时，开口向上；当 $a<0$ 时，开口向下.

(2) 对称轴是 $x=h$.

(3) 顶点是 (h,k).

从二次函数 $y=a(x-h)^2-k$ 的图像可以看出：

如果 $a>0$，当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大；如果 $a<0$，当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小.

2．4　二次函数y ＝ax２ ＋bx ＋c 的图像和性质

新 知 识

1.能否利用二次函数 $y=a(x-h)^2-k$ 的图像和性质讨论二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$ 的图像和性质?

配方可得：$y=\frac{1}{2}x^2-2x-1=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$.

把 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像向右平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，即可得到二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$ 的图像.

如果直接画二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$ 的图像，由配方的结果可知，抛物线的顶点是 $(2,-3)$，对称轴是 $x=2$.

利用对称性列表(表 4-12)：

新 知 识

表 4-12

x	…	-1	0	1	2	3	4	5	…
$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$	…	1.5	-1	-2.5	-3	-2.5	-1	-1.5	…

然后描点画图，得到 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$ 的图像(图 4-19).

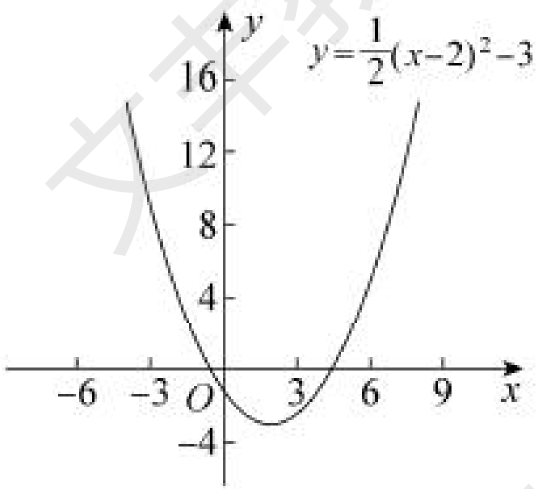


图 4-19

新 知 识

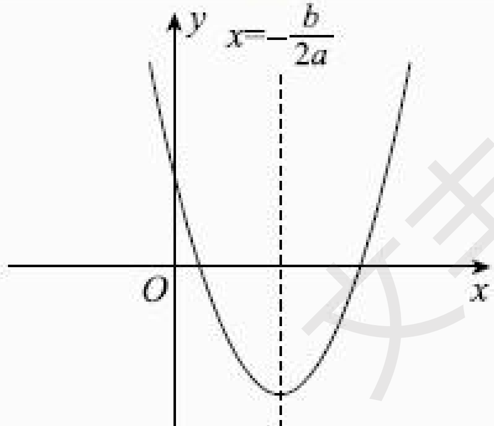
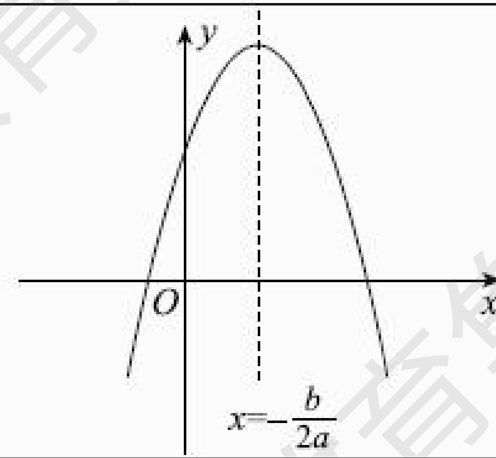
从二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$ 的图像可以看出：在对称轴左侧，抛物线从左到右下降；在对称轴右侧，抛物线从左到右上升. 即当 $x<2$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而增大.

2.试用上面的方法讨论二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像和性质.

归　纳

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与性质，见表 4-13.

表 4-13　二次函数的图像与性质

函数	$y=ax^2+bx+c\ (a>0)$	$y=ax^2+bx+c\ (a<0)$
图像		
开口方向	向上	向下

归　纳

顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
对称轴	直线 $x=-\frac{b}{2a}$	
y 随 x 的变换规律	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增加而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增加而减小
最值	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最小值，最小值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值，最大值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$

3．二次函数的解析式

探　究

已知一个二次函数的图像经过$(-1,10)$,$(1,4)$,$(2,7)$三点,求这个二次函数的解析式.

设所求二次函数为$y=ax^2+bx+c$,得到方程组

$$\begin{cases} a-b+c=10 \\ a+b+c=4 \\ 4a+2b+c=7 \end{cases}$$

解这个方程组,得

$$a=2,b=-3,c=5.$$

所求二次函数的解析式是$y=2x^2-3x+5$.

新 知 识

1.在求解二次函数的解析式 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 时，需求出系数 a,b,c 的值.由已知条件列出关于 a,b,c 的方程组，再求出 a,b,c 的值，从而写出二次函数的解析式.

2.二次函数的解析式有三种常见形式：

(1) 一般式：$y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq 0)$

(2) 顶点式：$y=a(x-h)^2+k(a,h,k$ 是常数，$a\neq 0)$

(3) 交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a,x_1,x_2$ 是常数，$a\neq 0)$

知识巩固

·例 1· 已知一个二次函数图像的顶点是(2，－4)，且与 y 轴的交点的纵坐标为 4.

(1) 求这个二次函数的解析式；

(2) 当 x 取哪些值时，y 随 x 增大而增大？

解：(1) 设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2-4$，把 $x=0$，$y=4$ 代入得

$$a(0-2)^2-4=4,$$

$$4a=8,$$

$$a=2,$$

所求解析式为 $y=2(x-2)^2-4$，

化成一般式为 $y=2x^2-8x+4$.

(3) 抛物线的对称轴是 $x=2$，抛物线开口向上，所以

当 $x>2$ 时，y 随 x 增大而增大.

4．求抛物线的顶点、对称轴的方法

二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a,b,c 是常数，$a\neq0$）的图像是抛物线，抛物线是轴对称图形．对称轴与抛物线唯一的交点是抛物线的顶点，二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和形状，对称轴两边图像的增减性不同．

本节将介绍求抛物线的顶点、对称轴的方法．

知识巩固

·例 2· 用配方法求下列二次函数的顶点坐标、对称轴方程.

(1)$y=x^2+x-1$；　(2)$y=-\dfrac{1}{3}x^2+x-1$.

解：(1)$y=x^2+x-1=\left(x^2+x+\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{5}{4}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$，

所以顶点坐标为$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4}\right)$，对称轴为$x=-\dfrac{1}{2}$.

(2)$y=-\dfrac{1}{3}x^2+x-1=-\dfrac{1}{3}\left(x^2-3x+\dfrac{9}{4}\right)-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，

所以顶点坐标为$\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$，对称轴为$x=\dfrac{3}{2}$.

5．二次函数与一元二次方程

探　究

二次函数 $y=x^2-3x-4$ 与一元二次方程 $x^2-3x-4=0$ 有怎样的关系?

(1) 从关系式看二次函数 $y=x^2-3x-4$ 成为一元二次方程 $x^2-3x-4=0$ 的条件是什么?

(2) 观察二次函数 $y=x^2-3x-4$ 的图像(图 4-20),由此能确定一元二次方程 $x^2-3x-4=0$ 的根吗?

二次函数 $y=x^2-3x-4$ 的函数值为 0 时就可转化成一元二次方程 $x^2-3x-4=0$,并由图 4-20 可知二次函数 $y=x^2-3x-4$ 的图像与 x 轴的交点是 $(-1,0)$, $(4,0)$,且 -1,4 为一元二次方程 $x^2-3x-4=0$ 的根.

5．二次函数与一元二次方程

探　　究

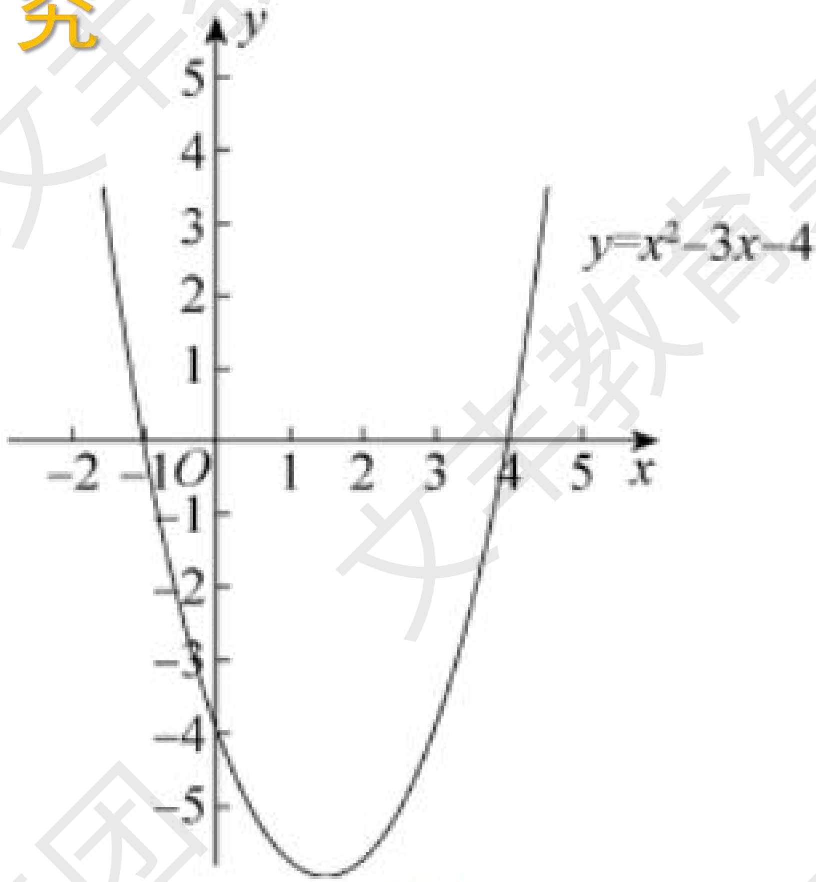


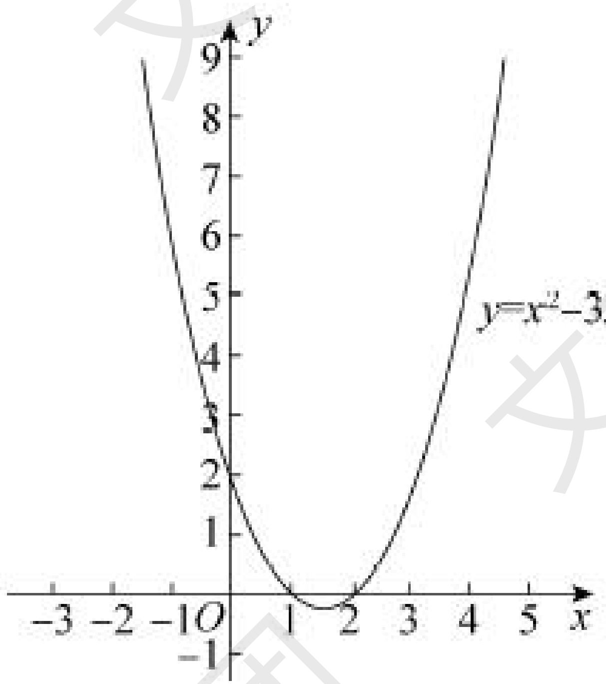
图 4-20

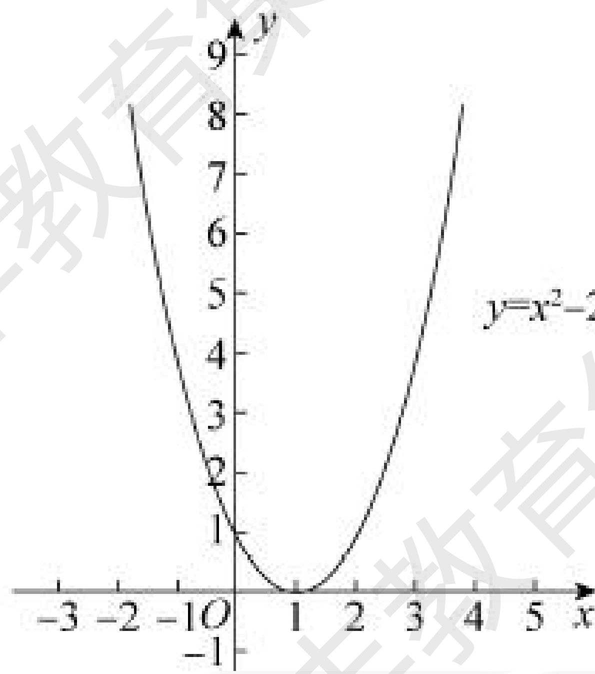
新 知 识

一般地，如果二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像与 x 轴有两个公共点 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，那么一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根 $x=x_1$，$x=x_2$。反过来也成立.

探　究

给出下列三个二次函数：(1) $y=x^2-3x+2$；(2) $y=x^2-2x+1$；(3) $y=x^2-x+1$. 它们的图像如图 4-21 所示.





探　究

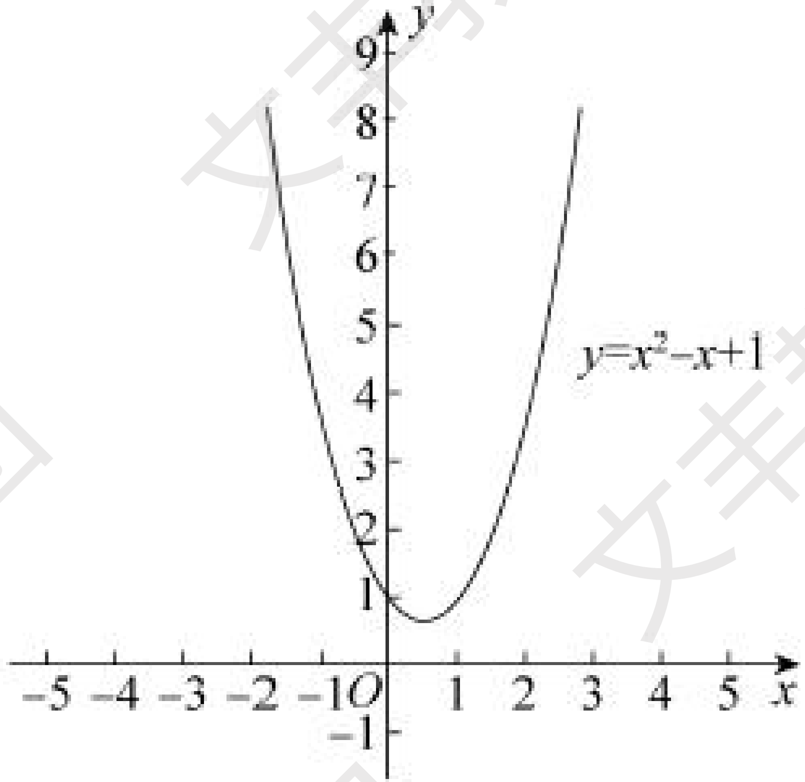


图 4-21

探　究

观察它们的图像与 x 轴的公共点个数，分别是____、____、____个.

一元二次方程 $x^2-3x+2=0$ 有________个实数根，$x^2-2x+1=0$ 有________个实数根，$x^2-x+1=0$ 呢？这三个方程实数根个数不同的原因是什么呢？

新 知 识

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的联系，见表 4-14.

表 4-14　二次函数与一元二次方程的联系

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴的交点	与 x 轴有两个不同的交点 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$	与 x 轴有唯一一个交点 $(x_0,0)$	与 x 轴没有交点
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（其中 $x_1<x_2$）	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根

知识巩固

·例3· 已知二次函数 $y=x^2-x-2$.

(1) 判断图像与 x 轴交点的个数,并求出交点坐标.

(2) 若 $p(m,-2)$ 为该函数图像上的点,求 m 的值.

解:(1) 因为 $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-2)=9>0$,

所以图像与 x 轴有两个交点.

解方程 $x^2-x-2=0$ 得

$$x_1=-1,x_2=2$$

二次函数 $y=x^2-x-2$ 与 y 轴的交点坐标为$(-1,0)$,$(2,0)$.

(3) 把 $p(m,-2)$ 代入 $y=x^2-x-2$ 得

$$m^2-m-2=-2$$

$$m^2-m=0$$

$$m_1=0,m_2=1$$

所以,m 的值为 0 或 1.

6．实际问题与二次函数

二次函数在我们的日常生产、生活中有着广泛的应用，比如，盈利最大、方案最优、用料最省、面积最大等都与二次函数相关，只要建立合适的二次函数模型，就可以用二次函数的知识解决实际问题.

知识巩固

·例 4· 某居民小区要在一块一边靠墙（墙长 18 m）的空地上建一个长方形花园，花园一边靠墙，另三边用总长为 40 m 的栅栏围成.如图 4-22 所示，设 $AB=x$（m），问：当 x 取何值时，花园的面积 y 最大？最大面积是多少？

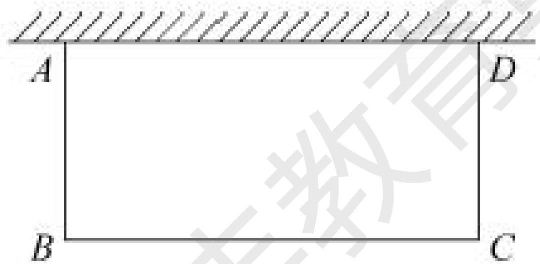


图 4-22

解：依题意有

$y=x(40-2x)=-2(x^2-20x)=-2(x-10)^2+200$，

因为 $0<40-2x\leqslant 18$，所以 $11\leqslant x<20$.

又因为二次函数的顶点不在自变量 x 的范围内，

而当 $11\leqslant x<20$ 内，y 随 x 的增大而减小，所以当 $x=11$ 时，

$y_{\max}=-2(11-10)^2+200=198(\mathrm{m}^2)$.

即当花园的宽是 11 m 时花园的面积最大，最大面积是 198 m^2.

知识巩固

·例 5· 某公司经销一种绿茶，每千克成本为 50 元.市场调查发现，在一段时间内，绿茶的销售量 w(kg) 随销售单价 x(元 /kg) 的变化而变化，具体关系式为 $w=-2x+240$，设这种绿茶在这段时间内的销售利润为 y(元).

(1) 求销售利润 y(元) 与销售单价 x(元 /kg) 之间的函数关系式.

(2) 当销售单价 x(元 /kg) 为多少时所获利润最大?

(3) 如果物价部门规定这种绿茶的销售单价不得高于 90 元 /kg，公司想要在这段时间内获得 2 250 元的销售利润，销售单价应定为多少元?

解：(1) 销售利润 y 与销售单价 x 之间的函数关系式为：

$$y=(-2x+240)(x-50)=-2x^2+340x-12\,000(50\leqslant x\leqslant 120).$$

(2) 该函数是开口向下的二次函数，对称轴为 $x=-\dfrac{340}{2\times(-2)}=85$，

所以销售单价为 85 元时所获利润最大.

知识巩固

(3) 解方程

$$-2x^2+340x-12\,000=2\,250,$$
$$x^2-170x+7\,125=0,$$

$$(x-75)(x-95)=0,$$
$$x_1=75, x_2=95(舍),$$

所以销售单价为 75 元时获得利润 2 250 元.

实际问题利用二次函数模型求最值,常用公式法或配方法,要注意实际问题中自变量的取值范围.

小 结

一、本章知识结构

- 函数
  - 函数的概念和图像
    - 变量和函数
    - 函数的图像
  - 一次函数
    - 正比例函数
    - 一次函数的相关概念
    - 一次函数的图像和性质
    - 一次函数与方程、不等式
  - 反比例函数
    - 反比例函数的相关概念
    - 反比例函数的图像和性质
  - 二次函数
    - 二次函数的概念
    - 二次函数的图像和性质
    - 二次函数的解析式
    - 求抛物线的顶点、对称轴的方法
    - 二次函数与一元二次方程
    - 实际问题与二次函数

二、知识回顾

在本章同学们首先了解了函数的概念，然后学习了一次函数，反比例函数，二次函数的图像和性质，运用所学函数分析和解决了一些实际问题.

运用函数模型解决实际问题，首先要分析实际问题中变量之间的关系，确立函数类型，写出函数表达式，再利用函数的图像和性质求解，从而获得实际问题的答案. 对此，可以结合本章知识结构图加以体会.