中华人民共和国教育部直属出版社
语文出版社
Language & Culture Press
www.ywcbs.com

初中升中职课程衔接

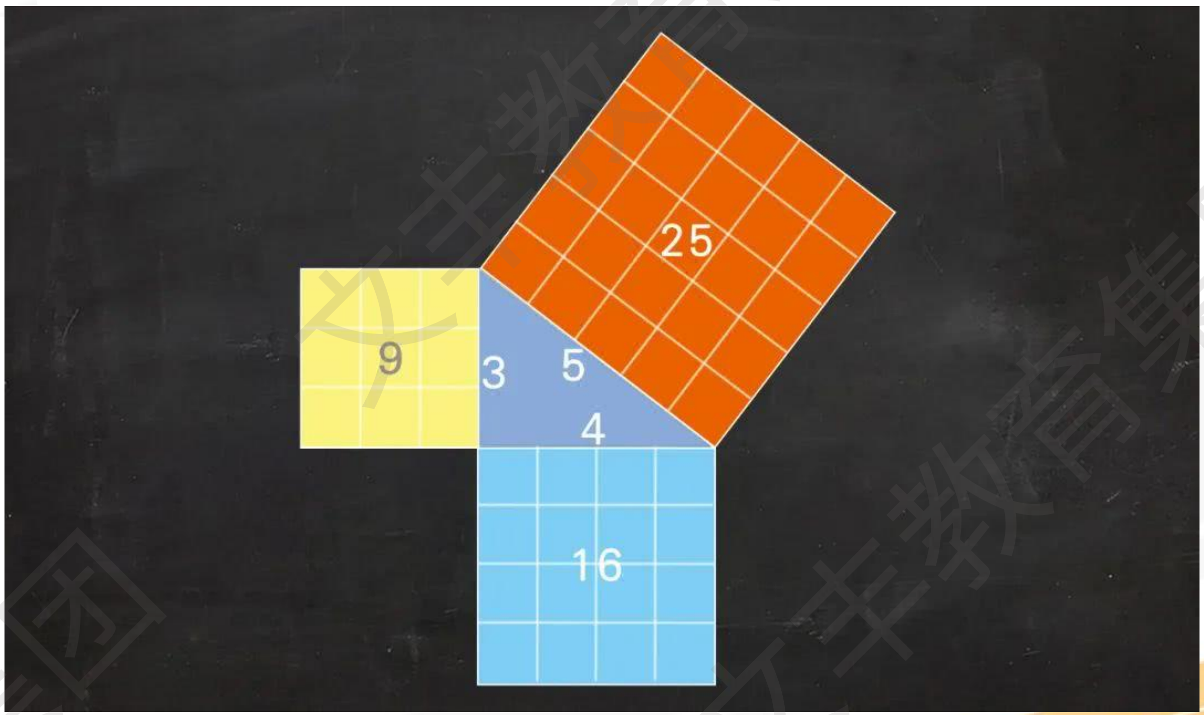
数学

第五章　锐角三角函数

目录
CONTENTS

勾股定理源于生活,贴近现实. 它不仅揭示了直角三角形三边之间的关系,把数与形结合起来,而且可以解决许多与实际生活紧密联系的问题,如在工程图纸,房屋建造,汽车制造,物理中求合力、合速度及运动方向等方面都有广泛应用.

本章将介绍勾股定理及其逆定理,锐角三角函数,等边三角形等知识及相关计算,并通过实际例子讲解它们在实际生活中的应用.



5.1 勾股定理

探　究

活动一：

画一个直角边为 3 cm 和 4 cm 的直角 $\triangle ABC$，用刻度尺量出 AB 的长.可以发现什么？

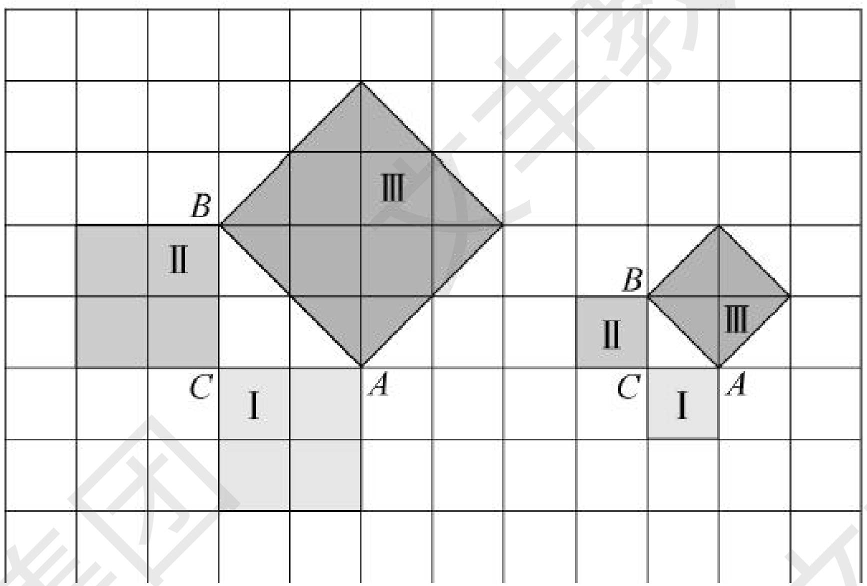
3^2+4^2 与 5^2 之间有什么关系？

对于任意的直角三角形也有这个性质吗？

活动二：

探究等腰直角三角形的情况.

观察图 5-1 并填写表 5-1(图中每个小方格代表一个单位面积)：



探　　究

表 5-1

	正方形 Ⅰ 的面积（单位面积）	正方形 Ⅱ 的面积（单位面积）	正方形 Ⅲ 的面积（单位面积）
较大的图			
较小的图			

(1) 这六个正方形中，两两成对的 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 的面积之间有什么关系吗？

(2) 等腰直角三角形 ABC 三边长度之间存在什么关系吗？

活动三：

由上面得到的结论，可以自然联想到：一般的直角三角形是否也具有该性质呢？观察图 5-2 并填写表 5-2（图中每个小方格代表一个单位面积）：

探　　究

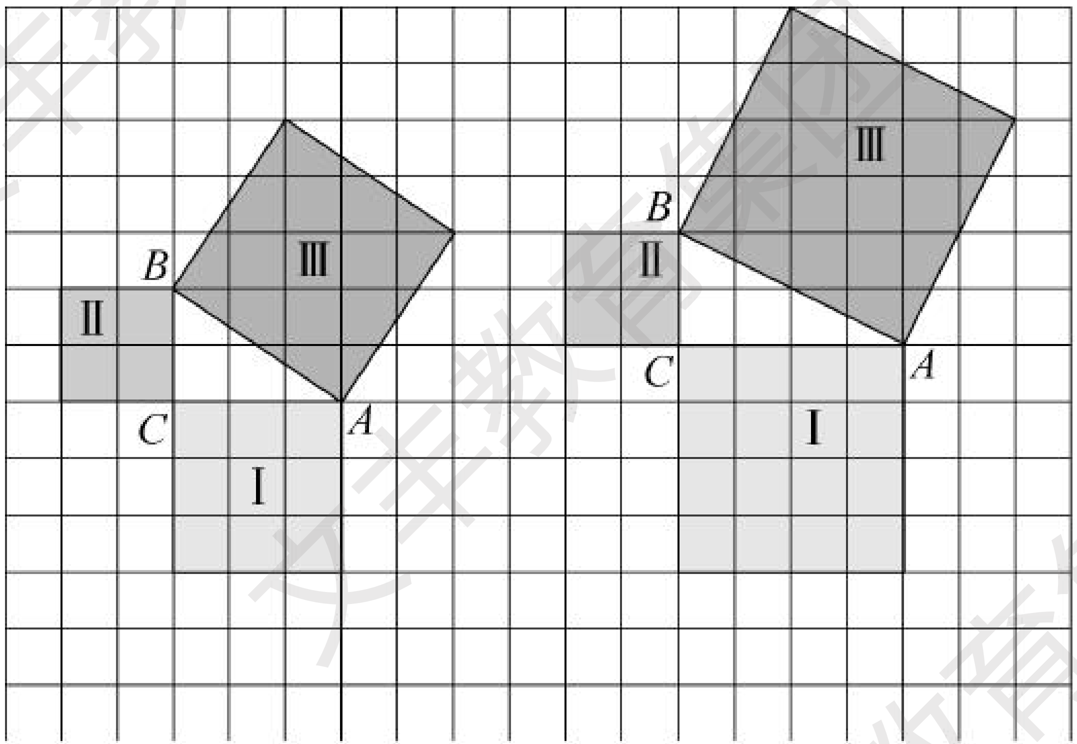


图 5-2

探　　究

表 5-2

	正方形 Ⅰ 的面积（单位面积）	正方形 Ⅱ 的面积（单位面积）	正方形 Ⅲ 的面积（单位面积）
较大的图			
较小的图			

（1）六个正方形中，两两成对的 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 的面积之间有什么关系？
（2）一般直角三角形三边长度之间存在什么关系？

新 知 识

在平面上的一个直角三角形中，两个直角边边长的平方加起来等于斜边长的平方.

勾股定理：设直角三角形的两条直角边长度分别是 a 和 b，斜边长度是 c，那么可以用数学语言表达直角三角形中的三边关系，即 $a^2+b^2=c^2$.

勾股数组：满足勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 的正整数组 (a,b,c)，其中 a,b,c 称为勾股数.常见的勾股数组有(3,4,5)，(5,12,13)，(6,8,10)，(7,24,25)，(8,15,17)，(9,12,15) 等.

归 纳

勾股定理的用途：

(1) 已知直角三角形的两边求解第三边；

(2) 已知三角形的三边长度，证明该三角形为直角三角形；或用来证明该三角形哪两边垂直；

(3) 利用勾股定理求线段长度.这是勾股定理最基本的运用.

勾股定理有广泛应用，下面用它解决几个问题.

知识巩固

·例 1· 已知直角三角形的两条直角边长分别为 6 和 8，求斜边长 x.

分析：可直接利用勾股定理.

解：由勾股定理，得 $x^2=6^2+8^2$，

所以 $x^2=100$，

因为 $x>0$，

故 $x=10$.

·例 2· 如图 5-3 所示，有一张直角三角形形状的纸片 ABC，两直角边 $AC=6$ cm，$BC=8$ cm，现将直角边 AC 沿直线 AD 折叠，使它落在斜边 AB 上，且与 AE 重合，求 CD 的长.

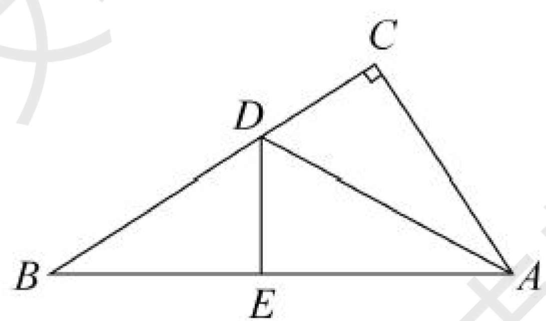


图 5-3

知识巩固

解：设 $CD=x$ cm，由题意知 $DE=x$ cm，$BD=(8-x)$cm，$AE=AC=6$ cm，

在 Rt△ABC 中，由勾股定理得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$(cm).

于是 $BE=10-6=4$(cm).

在 Rt△BDE 中，由勾股定理得 $4^2+x^2=(8-x)^2$，解得 $x=3$.

故 CD 的长为 3 cm.

·例 3· 某工人将一个 2.5 m 长的梯子，一头放在离墙 1.5 m 处，另一头靠墙，以便去修理墙上的有线电视分线盒(图 5-4)，那么这个分线盒离地多高？

分析：图中梯子与墙和地面构成了直角三角形 ABC，$AB=2.5$，$AC=1.5$，根据勾股定理可求出 BC 的长.

解：在直角三角形 ABC 中，

因为 $AB^2=AC^2+BC^2$

所以 $2.5^2=1.5^2+BC^2$.

因为 $BC>0$，

所以 $BC=2$.

因此分线盒离地面 2 m.

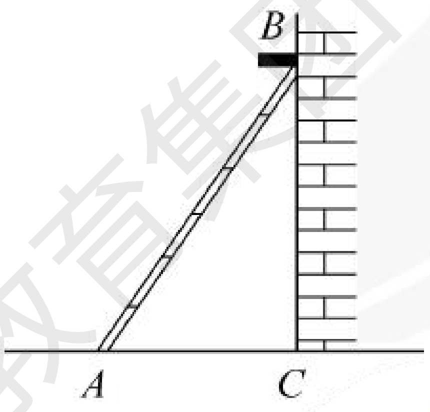


图 5-4

5.2 勾股定理的逆定理

新 知 识

勾股定理逆定理:如果三角形的三边长 a,b,c 满足 $a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形.

(1) 勾股定理的逆定理的作用是判定某一个三角形是否是直角三角形.

(2) 勾股定理的逆定理是把“数”转为“形”,是通过计算来判定一个三角形是否为直角三角形.

知识巩固

·例 1· $\triangle ABC$ 的三边分别为下列各组值,其中不是直角三角形三边的是( ).

A. $a=\frac{3}{5},b=\frac{4}{5},c=1$　　B. $a=1,b=\sqrt{3},c=2$

C. $a=5,b=12,c=13$　　D. $a=8,b=9,c=15$

分析:根据勾股定理及其逆定理,判断一个三角形是不是直角三角形,只要看两条较小边长的平方和是否等于最大边长的平方.

知识巩固

解：因为$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1^2=1$，$1^2+(\sqrt{3})^2=2^2=4$，$5^2+12^2=13^2=169$.

所以由勾股定理的逆定理可知 A,B,C 选项代表的三角形都是直角三角形,又因为 $8^2+9^2=145\neq 15^2=225$,所以 D 选项代表的三角形不是直角三角形,因此选择 D 选项.

·例 2· 已知在 $\triangle ABC$ 中,A,B,C 的对边分别是 a,b,c.

(1) 若 $a=5$,$b=4$,$c=3$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状;

(2) 若 $c=7$,$b=24$,$a=25$,求 A 的度数.

分析:根据勾股定理及其逆定理,判断一个三角形是不是直角三角形,只要看两条较小边长的平方和是否等于最大边长的平方.

解:(1) 因为 $3^2+4^2=9+16=25$,且 $5^2=25$,

所以 $3^2+4^2=5^2$,

根据勾股定理的逆定理,这个三角形是直角三角形;

(2) 因为 $7^2+24^2=49+576=625$,

又因为 $25^2=625$,

所以 $7^2+24^2=25^2$,

根据勾股定理,这个三角形是以 A 为直角的直角三角形,故 $A=90°$.

归　纳

判定一个三角形是直角三角形的方法：

(1) 首先确定最大边(以 c 为例).

(2) 验证 c^2 与 a^2+b^2 是否具有相等关系.若 $c^2=a^2+b^2$,则 $\triangle ABC$ 是 $C=90^\circ$ 的直角三角形;若 $c^2\neq a^2+b^2$,则 $\triangle ABC$ 不是直角三角形.

(3) 当 $a^2+b^2<c^2$ 时,此三角形为钝角三角形;当 $a^2+b^2>c^2$ 时,此三角形为锐角三角形,其中 c 为三角形的最大边.

5.3 锐角三角函数的应用

1．锐角三角函数的相关概念

问题

如图 5-5 所示，操场上有一个旗杆，小明打算测量旗杆高度，他站在离旗杆底部 10 m 远处，目测旗杆的顶部，视线与水平线的夹角为 30°，已知小明的视线高为 1.5 m.那么小明测得旗杆的高度是多少呢?

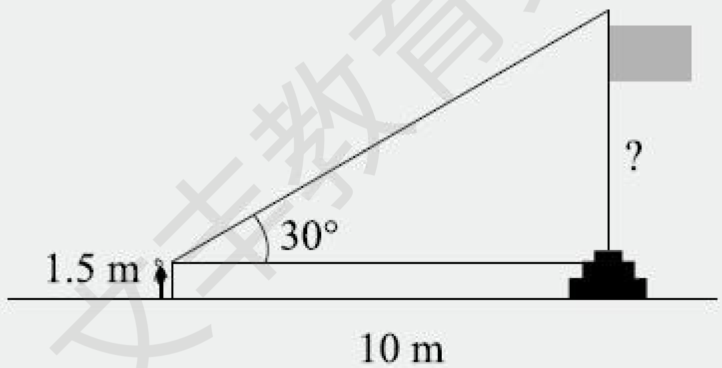


图 5-5

探　究

如图 5-6 所示，对于锐角 A 的每一个确定的值，不管三角形边长的大小如何变化，其对边与斜边，邻边与斜边，对边与邻边的比值也是唯一确定的吗？

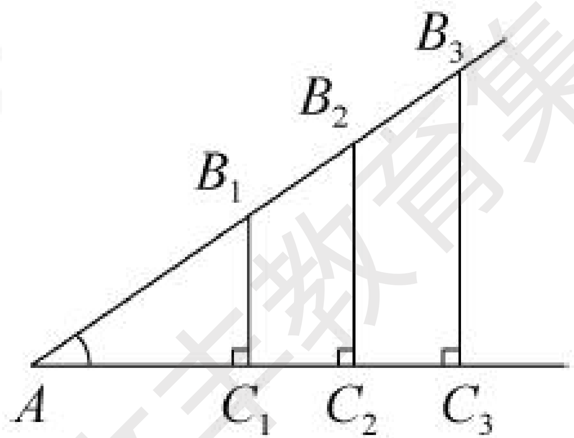


图 5-6

探　　究

在图 5-6 中，显然 $Rt\triangle AB_1C_1 \backsim Rt\triangle AB_2C_2$，$Rt\triangle AB_1C_1 \backsim Rt\triangle AB_3C_3$，

所以$\frac{B_2C_2}{B_1C_1}=\frac{AB_2}{AB_1}$，即$\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}$，

$\frac{B_3C_3}{B_1C_1}=\frac{AB_3}{AB_1}$，即$\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_3C_3}{AB_3}$，

故$\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}=\frac{B_3C_3}{AB_3}$，

因此，对于锐角 A 的每一个确定的值，不管三角形边长的大小如何变化，其对边与斜边，邻边与斜边，对边与邻边的比值都是唯一确定的.

新 知 识

如图 5-7 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$C=90°$，

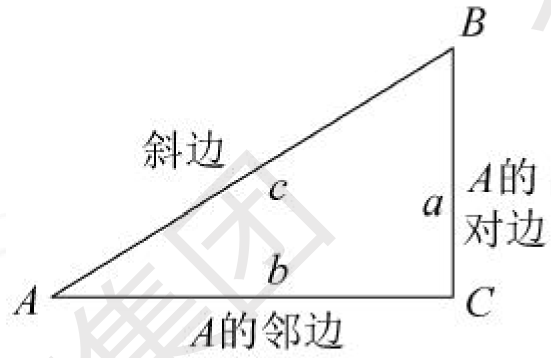


图 5-7

一般地，把锐角 A 的对边与斜边的比称为 A 的**正弦**，记作 $\sin A$，即

$$\sin A=\frac{A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}.$$

把锐角 A 的邻边与斜边的比称为 A 的**余弦**，记作 $\cos A$，即

$$\cos A=\frac{A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}.$$

把锐角 A 的对边与邻边的比称为 A 的**正切**，记作 $\tan A$，即

$$\tan A=\frac{A\text{ 的对边}}{A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

锐角 A 的正弦、余弦、正切称为 A 的**锐角三角函数**.

探　究

按照锐角三角函数的定义，借助有一个角为 30° 的直角三角形与等腰直角三角形的几何特征，能否求出 30°，45°，60° 的正弦值、余弦值、正切值？

新 知 识

特殊角的三角函数值，见表 5-3.

表 5-3　特殊角的三角函数值

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

知识巩固

·例 1· 在 Rt△ABC 中，$C=90°$，据以下条件求解：

(1) $AC=4$，$BC=3$，求 $\sin A$，$\tan B$；

(2) $BC=5$，$AB=13$，求 $\cos A$，$\cos B$.

解：(1) 在 Rt△ABC 中，由勾股定理得

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

因此

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5},$$

$$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{3}.$$

(2) 在 Rt△ABC 中，由勾股定理得

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12,$$

因此

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13},$$

$$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}.$$

知识巩固

·例 2· 在 Rt△ABC 中，$C=90°$，$AB=10$，$BC=6$，求 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 的值.

解：由勾股定理得，

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8,$$

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},$$

$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

·例 3· 计算：(1) $\dfrac{3\tan 30°}{2\cos^2 45°-1}$；

(2) $\cos 30°\tan 60°+\tan 45°\cos 60°$.

解：(1) $\dfrac{3\tan 30°}{2\cos^2 45°+1}=\dfrac{3\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{2\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\cos 30°\tan 60°+\tan 45°\cos 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}+1\times\dfrac{1}{2}=2$.

2．解直角三角形

新 知 识

一般地，在直角三角形中，除一个直角外，还有两个角和三条边，共五个元素．由直角三角形中的已知元素，求出其余未知元素的过程，称为**解直角三角形**．

归 纳

1.解直角三角形，一般有以下两种情况：

（1）已知两条边，利用勾股定理及锐角三角函数的定义求解剩余的边和角；

（2）已知一条边和一个锐角，利用勾股定理及锐角三角函数的定义求解剩余的边和角．

2.在 $Rt\triangle ABC$ 中，若 $C=90^\circ$，则 $\sin A=\cos B$，即在直角三角形中互余的两个角的正弦值与余弦值相等．

知识巩固

·例 4· (1) 在 Rt△ABC 中，$C=90°$，$AB=13$，$BC=5$，求 AC，$\sin A$，$\tan B$；

(2) 在 Rt△ABC 中，$C=90°$，$b=17$，$B=45°$，求 a，c 与 A.

解：(1) 因为 $AB^2=AC^2+BC^2$，即 $13^2=AC^2+5^2$，解得 $AC=12$，

所以 $\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{13}$，$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{12}{5}$.

(2) 因为 $A=C-B=90°-45°=45°=B$，

所以 $a=b=17$，

由 $c^2=a^2+b^2=17^2+17^2$，得 $c=17\sqrt{2}$.

5.4　正三角形

新 知 识

等边三角形是三边都相等的特殊的**等腰三角形**，也称为**正三角形**.

正三角形的性质如下：

(1) 三个内角都相等，每个角都是 60°；

(2) 顶角的平分线、底边上的中线和底边上的高线互相重合(三线合一)；

(3) 正三角形是轴对称图形，有三条对称轴.

归　纳

由等腰三角形的性质和判定方法，可以得到：

（1）等边三角形的三个内角都相等，并且每一个角都等于 60°.

（2）三个角都相等的三角形是等边三角形.

（3）有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

（4）等边三角形面积计算公式 $S_{\triangle}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$（其中 a 是等边三角形的边长）.

（5）三角形三边中线的交点称为重心，重心到顶点的距离等于它到对边中点的距离的两倍.

知识巩固

·例 1· 如图 5-8 所示，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$DE \parallel BC$，分别交 AB，AC 于点 D，E.求证：$\triangle ADE$ 是等边三角形.

证明：因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，

所以 $A = B = C$.

因为 $DE \parallel BC$，

所以 $\angle ADE = B$，$\angle AED = C$.

所以 $A = \angle ADE = \angle AED$，

故 $\triangle ADE$ 是等边三角形.

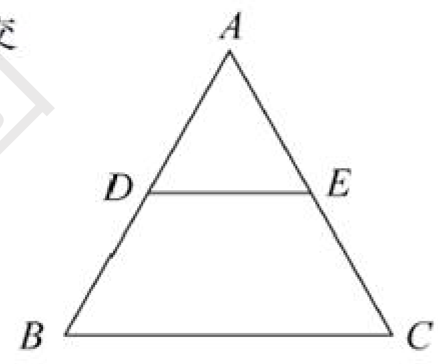


图 5-8

·例 2· 如图 5-9 所示，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D，E 分别是边 AB，AC 的中点，且 $AB = 6$，求 AE，BG.

解：因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形

所以 $BE \perp AC$，$\angle ABE = 30°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$\angle AEB = 90°$，$\angle ABE = 30°$，$AB = 6$，

则 $\sin\angle ABE = \sin 30° = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AE}{6} = \dfrac{1}{2}$，

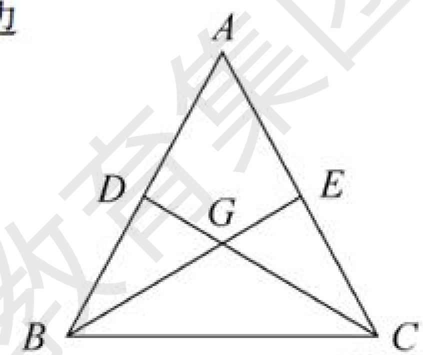


图 5-9

知识巩固

解得 $AE=3$,

$\sin A=\sin 60^\circ=\frac{BE}{AB}=\frac{BE}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $BE=3\sqrt{3}$,

又因为点 D,E 分别是边 AB,AC 的中点,

所以点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,

故由重心的性质可得

$$BG=\frac{2}{3}BE=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

小 结

一、本章知识结构图

- 锐角三角函数
  - 勾股定理
  - 勾股定理的逆定理
  - 锐角三角函数的应用
    - 锐角三角函数的相关概念
    - 解直角三角形
  - 正三角形

二、知识回顾

本章以直角三角形和等边三角形为载体,分别介绍了勾股定理、勾股定理的逆定理和锐角三角函数.

勾股定理反映了直角三角形三边之间的数量关系,不仅在解决与直角三角形相关的问题时很有用,而且在解决许多其他数学问题时也很有用. 勾股定理的逆定理提供了直角三角形的一种判定方法. 锐角三角函数反映了直角三角形中边角之间的关系,即无论Rt△ABC的大小如何,只要给定锐角A ,则A 的对边与斜边、邻边与斜边、对边与邻边的比值都随之确定,由此定义了锐角三角函数. 利用这一关系,结合勾股定理及其逆定理等知识,就可以解决各种与直角三角形边角有关的问题.

二、知识回顾

由直角三角形全等的判定定理可知,一个直角三角形可以由它的三条边和两个锐角这五个元素中的两个(其中至少有一个是边)唯一确定．有了锐角三角函数知识,结合直角三角形两个锐角互余及勾股定理,就可由这两个元素求出其他元素,这就是解直角三角形.

在等边三角形中,我们运用等边三角形及重心性质,再结合锐角三角函数,只要知道等边三角形的边长、高、重心到顶点距离、重心到边的距离中的一个,就可以求出这个等边三角形的面积.

由此可见,关注本章中各部分内容之间的联系,对我们更深入地理解相关知识,提高灵活应用知识的能力等都很有帮助.