中华人民共和国教育部直属出版社
语文出版社
Language & Culture Press
www.ywcbs.com

初中升中职课程衔接

数学

第二章　方程与方程组

目录
CONTENTS

法国数学家笛卡尔曾设想:把所有的数学问题转化为代数问题,再把所有的代数问题转化为解方程问题．虽然笛卡尔的设想未能实现,但是这也充分说明了方程的重要性.

方程是指含有未知数的等式．方程来源于生产和生活,人类对方程的研究也有着悠久的历史,我国古代数学著作«九章算术»中就有专门以“方程”命名的一章．方程是分析问题和解决问题的一种很常见的数学模型,本章将介绍学习方程(组)的解法,以及如何用方程的思想来解决实际问题.

2.1　一元一次方程

1．从算式到方程

探　究

试用算术方法和方程方法解决下列各题，完成表 2-1.

(1) 用一根长 24 cm 的铁丝围成一个正方形，正方形的边长是多少？

(2) 一台计算机已使用了 1 700 h，预计每月再使用 150 h，经过多少月这台计算机的使用时间达到规定的检修时间 2 450 h？

(3) 某校女生占全体学生数的 52%，女生人数比男生人数多 80 人，这个学校共有多少学生？

(4) 一辆客车和一辆卡车同时从 A 地出发沿同一公路同方向行驶，客车的行驶速度是 70 km/h，卡车的行驶速度是 60 km/h，客车比卡车早 1 h 经过 B 地．问 A，B 两地间的距离是多少？

1．从算式到方程

探　究

表 2-1

	算术方法	方程方法
(1)		
(2)		
(3)		
(4)		

新 知 识

一般地，只含有一个未知数(元)，未知数的次数都是 1，等号两边都是整式，这样的方程称为**一元一次方程**.

使方程中左右两边相等的未知数的值就是这个方程的解.

注意："一元"是指一个未知数；"一次"是指未知数的指数是一.

知 识 巩 固

·例 1· 已知关于 x 的方程 $nx^m+2=5$ 是一元一次方程，则 m,n 应满足什么条件？

解：根据题意，得 $m=1,n\neq 0$.

·例 2· 已知 $(2m-8)x^2+x^{3n-2}-6=0$ 是关于 x 的一元一次方程，求 m,n 的值.

解：根据题意，得 $2m-8=0,3n-2=1$，所以 $m=4,n=1$.

·例 3· 已知 $x=-1$ 是关于 x 的方程 $2x+a=3$ 的解，求 a 的值.

解：根据题意，得 $a=5$.

·例 4· “比 x 的 2 倍大 3 的数是 8”用方程表示为________.

解：根据题意，得 $2x+3=8$.

2．解一元一次方程(一)

2．1　合并同类项法

问题　某品牌电脑专卖店计划购进A,B,C三种型号的电脑共计420台,其中A,B,C三种型号的电脑数量之比为1∶2∶3.求该电脑专卖店计划购进这三种型号的电脑各多少台.

设A型号的电脑为x(台),则B型号的电脑为$2x$(台),C型号的电脑为$3x$(台),根据题目中的等量关系可得方程

$x+2x+3x=420$,

把含有x的项合并同类项,得

$6x=420$,

解得$x=70$,

所以$2x=140$,$3x=210$.

因此该电脑专卖店计划购进这三种型号的电脑分别为70台,140台,210台.

新 知 识

用合并同类项的方法解一元一次方程就是将方程中的同类项进行合并，把以 x 为未知数的一元一次方程变形为 $ax=b(a\neq 0,a,b$ 为已知数) 的形式，方程两边同时除以 a，从而得到 $x=\dfrac{b}{a}$.

知识巩固

·例 5· 解下列方程：

(1)$2.4x-3x-1.4x=5.2-8$； (2) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=4-30$.

解：(1) 合并同类项，得 $-2x=-2.8$，

系数化为 1，得 $x=1.4$.

(2) 合并同类项，得$\frac{13}{12}x=-26$，

系数化为 1，得 $x=-24$.

·例 6· 一箩筐内有梨、苹果若干个，它们的数量比为 4∶3，拿出 12 个苹果后，苹果的个数正好是梨的一半，求这个箩筐内有梨和苹果各多少个.

解：设这个箩筐内原有梨 $4x$（个），苹果 $3x$（个），根据题意得

$$3x-\frac{1}{2}\times 4x=12,$$

合并同类项，得 $x=12$，

所以，$4x=48$，$3x=36$，

即这个箩筐内原有梨 48 个，苹果 36 个.

2．解一元一次方程(一)

2．2 移项法

问题 某品牌电脑专卖店计划购进A,B,C三种型号的电脑共计420台,其中A,B,C三种型号的电脑数量之比为1∶2∶3,求该电脑专卖店计划购进这三种型号的电脑各多少台.

设A型号的电脑为x(台),则B型号的电脑为$2x$(台),C型号的电脑为$3x$(台),根据题目中的等量关系可得方程

$x+2x+3x=420$,

把含有x的项合并同类项,得

$6x=420$,

解得$x=70$,

所以$2x=140$,$3x=210$.

因此该电脑专卖店计划购进这三种型号的电脑分别为70台,140台,210台.

新 知 识

把等式一边的某项变号后移到另一边，称为**移项**.

知 识 巩 固

例 7 解下列方程：

(1) $-7x+3=-13x-2$；

(2) $x-3=\frac{3}{2}x+1$.

解：(1) 移项，得 $-7x+13x=-2-3$，

合并同类项，得 $6x=-5$，

系数化为 1，得 $x=-\frac{5}{6}$.

(2) 移项，得 $x-\frac{3}{2}x=1+3$，

合并同类项，得 $-\frac{1}{2}x=4$，

系数化为 1，得 $x=-8$.

知 识 巩 固

·例 8· 甲，乙两人同时从 A 地出发去 B 地，甲骑自行车，骑行速度为 10 km/h，乙步行，行走速度为 6 km/h，当甲到达 B 地时，乙距 B 地还有 8 km.求甲走了多少时间，A，B 两地的距离是多少.

解：设甲走了 x h，则 A，B 两地的距离是 $10x$ km，根据题意，得

$$10x=6x+8,$$

移项，得 $10x-6x=8$，

合并同类项，得 $4x=8$，

系数化为 1，得 $x=2$，则 $10x=20$，

即甲走了 2 h，A，B 两地的距离是 20 km.

3．解一元一次方程(二)

3．1　去括号法

问题　某市对城区主干道进行绿化，计划把某一段公路的一侧全部栽上桂花树，要求路的两端各栽一棵，并且每两棵的间隔相等，如果每隔5 m栽1棵，则树苗缺21棵；如果每隔6 m栽1棵，则树苗正好用完．求原有树苗多少棵？

设原有树苗x(棵)，根据题意列出方程

$$5(x+21-1)=6(x-1),$$

去括号，得 $5x+100=6x-6$，

移项，得 $5x-6x=-6-100$，

合并同类项，得 $-x=-106$，

系数化为1，得 $x=106$，

由此可知，原有树苗106棵．

新 知 识

解方程中的去括号和有理数运算中的去括号类似，都是利用乘法分配律，其方法：括号外的因数是正数，去括号后各项的符号与原括号内相应各项的符号相同；括号外的因数是负数，去括号后各项的符号与原括号内相应各项的符号相反.

知 识 巩 固

·例 9· 解下列方程：

(1) $5x-2(3x-2)=4$；　　(2) $\frac{1}{2}(x-2)=3-\frac{1}{2}(x-2)$.

解：(1) 去括号，得 $5x-6x+4=4$，

移项，得 $5x-6x=4-4$，

合并同类项，得 $-x=0$，

系数化为 1，得 $x=0$.

(2) 去括号，得 $\frac{1}{2}x-1=3-\frac{1}{2}x+1$，

移项，得 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x=3+1+1$，

合并同类项，得 $x=5$.

3．解一元一次方程(二)

3．2 去分母法

问题 某市对城区主干道进行绿化，计划把某一段公路的一侧全部栽上桂花树，要求路的两端各栽一棵，并且每两棵的间隔相等，如果每隔5 m栽1棵，则树苗缺21棵；如果每隔6 m栽1棵，则树苗正好用完．求原有树苗多少棵？

设原有树苗x(棵)，根据题意列出方程

$$5(x+21-1)=6(x-1),$$

去括号，得 $5x+100=6x-6$，

移项，得 $5x-6x=-6-100$，

合并同类项，得 $-x=-106$，

系数化为1，得 $x=106$，

由此可知，原有树苗106棵．

新 知 识

(1) 去分母的方法:依据等式的性质,方程两边各项都乘以所有分母的最小公倍数,将分母去掉.

(2) 解一元一次方程的一般步骤为:① 去分母;② 去括号;③ 移项;④ 合并同类项;⑤ 系数化为 1.

知 识 巩 固

· 例 10 · 解下列方程：

(1) $\frac{x-3}{2}-\frac{4x+1}{5}=1$；

(2) $\frac{5x+4}{3}+\frac{x-1}{4}=2-\frac{-5x-7}{12}$.

解：(1) 去分母，得 $5(x-3)-2(4x+1)=10$，

去括号，得 $5x-15-8x-2=10$，

移项，得 $5x-8x=15+2+10$，

合并同类项，得 $-3x=27$，

系数化为 1，得 $x=-9$.

(2) 去分母，得 $4(5x+4)+3(x-1)=24-(-5x-7)$，

去括号，得 $20x+16+3x-3=24+5x+7$，

移项，得 $20x+3x-5x=24+7-16+3$，

合并同类项，得 $18x=18$，

系数化为 1，得 $x=1$.

3．解一元一次方程(二)

3．2　去分母法

问题　小明以 8 km/h 的速度从甲地到达乙地，回来时走的路程比去时多 3 km，已知速度为 9 km/h，这样回来时比去时多用$\frac{1}{8}$小时，求甲、乙两地的距离．

设甲、乙两地的距离为 x km，根据题意，得

$$\frac{x}{8}+\frac{1}{8}=\frac{x+3}{9},$$

去分母，得 $9x+9=8(x+3)$，

去括号，得 $9x+9=8x+24$，

移项，得 $9x-8x=24-9$，

合并同类项，得 $x=15$，

因此，甲、乙两地的距离为 15 km．

新 知 识

(1) 去分母的方法:依据等式的性质,方程两边各项都乘以所有分母的最小公倍数,将分母去掉.

(2) 解一元一次方程的一般步骤为:① 去分母;② 去括号;③ 移项;④ 合并同类项;⑤ 系数化为 1.

知识巩固

例 10 解下列方程：

(1) $\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{4x+1}{5}=1$；

(2) $\dfrac{5x+4}{3}+\dfrac{x-1}{4}=2-\dfrac{-5x-7}{12}$.

解：(1) 去分母，得 $5(x-3)-2(4x+1)=10$，

去括号，得 $5x-15-8x-2=10$，

移项，得 $5x-8x=15+2+10$，

合并同类项，得 $-3x=27$，

系数化为 1，得 $x=-9$.

(2) 去分母，得 $4(5x+4)+3(x-1)=24-(-5x-7)$，

去括号，得 $20x+16+3x-3=24+5x+7$，

移项，得 $20x+3x-5x=24+7-16+3$，

合并同类项，得 $18x=18$，

系数化为 1，得 $x=1$.

4．实际问题与一元一次方程

新 知 识

方程是分析和解决问题的一种很有用的数学工具.

利用一元一次方程解决实际问题的一般步骤为：

(1) 读题、审题后，找出实际问题中的等量关系；

(2) 根据找出的等量关系，设未知数，列方程，把实际问题转化成数学问题；

(3) 解方程后，验证解的合理性，再作答.

知识巩固

·例11· 某瓷器厂共有工人120人，每个工人1天能做200只茶杯或50只茶壶，8只茶杯和1只茶壶配套，如何安排工人生产，可使每天生产的瓷器配套？

分析：解决配套问题时，关键是明确配套物品之间的数量关系，它是列方程的依据.

解：设安排 x 人生产茶杯，则 $(120-x)$ 人生产茶壶，依题意可列方程

$$200x=8\times 50(120-x),$$

解方程，得

$$200x=48\ 000-400x,$$

$$200x+400x=48\ 000,$$

$$600x=48\ 000,$$

$$x=80,$$

$$120-80=40,$$

即安排80人生产茶杯，40人生产茶壶.

知 识 巩 固

·例 12· 某商店将彩电先按原价提高 30%，然后又以八折优惠售出，结果每台彩电比原价多赚了 130 元，则每台彩电原价多少元？

解：设每台彩电原价为 x（元），依题意有

$$(1+30\%)x\times 80\%=x+130,$$

解得 $x=3\ 250$，

即每台彩电原价 3 250 元.

2.2 一元二次方程

1．一元二次方程的相关概念

1．1　一元二次方程的概念

问题

某旅游景点四月份共接待游客16万人次，六月份共接待游客49万人次，则每月接待游客人次的平均增长率为多少？

设每月接待游客人次的平均增长率为x，根据题意可得方程

$$16(1+x)^2=49.$$

新 知 识

一般地，把含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 次的整式方程称为**一元二次方程**.

一元二次方程经过整理都可化成一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.其中，ax^2 称为二次项，a 是二次项的系数，bx 称为一次项，b 是一次项的系数，c 是常数项.

知 识 巩 固

·例 1· 方程 $(x-2)(x+2)=3x^2-x-5$ 化为一般形式为________.

解：由原方程可得：$2x^2-x-1=0$.

·例 2· 关于 x 的一元二次方程 $2x(x-3)=3(x+7)-4$ 的一般形式是________，它的二次项的系数是________，一次项的系数是________，常数项是________.

解：去括号可得，$2x^2-6x=3x+21-4$，

移项并合并同类项，可得一元二次方程的一般形式为

$$2x^2-9x-17=0,$$

所以二次项的系数是 2，一次项的系数是 -9，常数项是 -17.

1．一元二次方程的相关概念

1．2　一元二次方程的根

问题

某旅游景点四月份共接待游客 16 万人次，六月份共接待游客 49 万人次，则每月接待游客人次的平均增长率为多少？

设每月接待游客人次的平均增长率为 x，根据题意可得方程

$$16(1+x)^2=49.$$

新 知 识

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也可以称为一元二次方程的**根**.

知识巩固

·例3· 若一元二次方程$(m-2)x^2+(m+4)x+2m-6=0$的常数项为0,求此方程的根.

解:依题意可知

$$2m-6=0,$$

解得$m=3$,

所以方程为$x^2+7x=0$,

因此可得该方程的根是$x_1=-7$,$x_2=0$.

·例4· 已知a是方程$x^2-2x-3=0$的一个根,求代数式$3a^2-6a-3$的值.

解:依题意可知

$$a^2-2a=3,$$

所以$3a^2-6a-3=3(a^2-2a)-3=3\times3-3=6$.

2．解一元二次方程

2．1　直接开平方法

问题　市区内有一块边长为15 m的正方形绿地，经城市规划，需扩大绿化面积，预计规划后的正方形绿地面积将达400 m^2，请问这块绿地的边长增加了多少？一元二次方程可以解决这个问题吗？

设这块绿地的边长增加了 x m，根据题意得

$$(15+x)^2=400,$$

因为 $20^2=400$，$(-20)^2=200$，

故 $15+x=20$ 或 $15+x=-20$（舍），

因此 $x=5$.

探　　究

1.解一元二次方程 $x^2=5$，$x^2=16$，$x^2-121=0$.

2.可以求出一元二次方程 $-x^2+3=0$ 和 $x^2+1=0$ 的解吗？若能，请写出求解过程；若不能，请说明原因.

新 知 识

一般地，对于方程

$$x^2 = p,$$

(1) 当 $p > 0$ 时，根据平方根的意义，方程有两个不等的实数根

$$x_1 = -\sqrt{p}, x_2 = \sqrt{p};$$

(2) 当 $p = 0$ 时，方程有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = 0$；

(3) 当 $p < 0$ 时，因为对任意实数 x 都有 $x^2 \geq 0$，所以方程无实数根.

这种解某些一元二次方程的方法称为**直接开平方法**.

归　纳

直接开平方法适用于 $x^2=p(p\geqslant 0)$ 形式的一元二次方程的求解.这里的 x 既可以是字母、单项式,也可以是含有未知数的多项式.换言之:只要经过变形可以转化为 $x^2=p(p\geqslant 0)$ 形式的一元二次方程都可以用直接开平方法求解.

知识巩固

·例5· 解下列方程：

(1)$4y^2=25$；　　(2)$2x^2-6=0$.

分析：先将各方程化简成$ax^2=b(a\neq0)$的形式，进而整理成$x^2=\frac{b}{a}$的形式，再直接开平方求解.

解：(1) 二次项系数化为1，得$y^2=\frac{25}{4}$，$y=\pm\sqrt{\frac{25}{4}}$，$y=\pm\frac{5}{2}$，

故$y_1=-\frac{5}{2}$，$y_2=\frac{5}{2}$.

(2) 移项，得$2x^2=6$，二次项系数化为1，得$x^2=3$，$x=\pm\sqrt{3}$，

故$x_1=-\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3}$.

知识巩固

·例 6· 解下列方程：

(1) $(x+2)^2-9=0$；　　(2) $3(x-1)^2-4=0$.

分析：将形如 $(mx+p)^2=q$ 的方程两边直接开平方可得 $mx+p=\pm\sqrt{q}$，所以 $x_1=\dfrac{-p-\sqrt{q}}{m}$，$x_2=\dfrac{-p+\sqrt{q}}{m}$.

解：(1) 移项，得 $(x+2)^2=9$，

由此得 $x+2=3$ 或 $x+2=-3$，所以 $x_1=1$，$x_2=-5$.

(2) 移项，得 $(x-1)^2=\dfrac{4}{3}$，

由此得 $x-1=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $x_1=1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$x_2=1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

2．解一元二次方程

2．2　配方法

探　究

填空：

(1)x^2+6x+____$=(x+$____$)^2$；　(2)x^2-2x+____$=(x-$____$)^2$；

(3)x^2-5x+____$=(x-$____$)^2$；　(4)x^2+x+____$=(x+$____$)^2$；

(5)x^2+px+____$=(x+$____$)^2$.

将方程 $x^2+2x-3=0$ 化为 $(x+h)^2=k$ 的形式为__________.

新 知 识

一般地，如果一个一元二次方程通过配方转化成

$$(x+m)^2=p$$

的形式，那么有：

(1) 当 $p>0$ 时，方程有两个不等的实数根

$$x_1=-m-\sqrt{p},x_2=-m+\sqrt{p};$$

(2) 当 $p=0$ 时，方程有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-m$；

(3) 当 $p<0$ 时，因为对任意实数都有 $(x+m)^2\geqslant0$，所以方程无实数根.

通过配成完全平方的形式来解一元二次方程的方法称为**配方法**.

归　纳

利用配方法解一元二次方程的一般步骤为：

(1) 移项；

(2) 化二次项系数为 1；

(3) 方程两边都加上一次项系数的一半的平方；

(4) 原方程变形为 $(x+m)^2=n$ 的形式；

(5) 如果右边是非负数，就可以直接开平方求出方程的解，如果右边是负数，则一元二次方程无解.

知 识 巩 固

例 7 解下列方程：

(1)$x^2-4x+3=0$；　　(2)$x^2+3x-1=0$.

解：(1) 移项，得 $x^2-4x=-3$，

配方，得 $x^2-4x+2^2=-3+2^2$，

即 $(x-2)^2=1$，

解得 $x-2=\pm 1$，

所以 $x_1=1$，$x_2=3$.

(2) 移项，得 $x^2+3x=1$，

配方，得 $x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=1+\left(\frac{3}{2}\right)^2$，

即 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$，

解得 $x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$，

所以 $x_1=-\frac{\sqrt{13}+3}{2}$，$x_2=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$.

知 识 巩 固

·例 8· 用配方法解下列方程：

(1)$3x^2-6x-2=0$；　　(2)$2x^2+3=7x$.

分析：将各方程的两边同时除以二次项的系数，将二次项的系数化为 1，再配方.

解：(1) 将方程二次项的系数化为 1，得 $x^2-2x-\frac{2}{3}=0$，

配方，得 $(x-1)^2=\frac{5}{3}$，

解得 $x-1=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$，

所以 $x_1=\frac{3-\sqrt{15}}{3}$，$x_2=\frac{3+\sqrt{15}}{3}$.

(2) 将方程二次项的系数化为 1 并移项，得 $x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$，

配方，得 $x^2-\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2+\frac{3}{2}=0$，

即 $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$，解得 $x-\frac{7}{4}=\pm\frac{5}{4}$，

所以 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=3$.

2．解一元二次方程

2．3　公式法

探　究

任何一个一元二次方程都可以写成一般形式

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0),$$

用前面所学的配方法可以将上式的左边配成是完全平方，右边是常数的形式，即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

因为 $4a^2>0$，所以

(1) 当 $b^2-4ac>0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$，直接开平方，得：$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

即 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

此时方程有两个不等的实数根，即 $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

中华人民共和国教育部直属出版社
语文出版社
Language & Culture Press
www.ywcbs.com

2．解一元二次方程

2．3　公式法

探　究

（2）当 $b^2-4ac=0$ 时，$\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=0$，

此时方程有两个相等的实数根，即 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

（3）当 $b^2-4ac<0$ 时，$\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，

此时方程无实数根.

新 知 识

由上面探究可知，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根由方程的系数 a,b,c 而定，式子 b^2-4ac 称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ **根的判别式**，通常用希腊字母"Δ"表示，即 $\Delta=b^2-4ac$.

当 $b^2-4ac\geq 0$ 时，将 a,b,c 代入式子 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，就得到方程的根.这个式子称为一元二次方程的**求根公式**.利用求根公式解一元二次方程的方法称为**公式法**.

归　纳

利用公式法解一元二次方程的一般步骤为：

(1) 把一元二次方程化为一般式，即 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的形式；

(2) 确定 a,b,c 的值，注意系数的符号；

(3) 计算根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值；

(4) 求方程的解：当 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 时，将 a,b,c 及 $\Delta=b^2-4ac$ 的值代入求根公式，得出方程的根；当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根.

知 识 巩 固

·例 9· 用求根公式解下列方程：

(1)$2x^2+x-6=0$；

(2)$4x^2+4x+3=1-8x$.

分析：将原方程化为一般形式，即 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的形式，再求出 b^2-4ac 的值，然后根据 b^2-4ac 的值的情况，利用求根公式求解.

解：(1) 因为 $a=2,b=1,c=-6$，

又因为 $b^2-4ac=1^2-4\times2\times(-6)=1+48=49$，

所以 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{49}}{2\times2}=\dfrac{-1\pm7}{4}$，

即 $x_1=-2,x_2=\dfrac{3}{2}$.

知 识 巩 固

(2) 原方程化为一般形式，得 $2x^2+6x+1=0$，

因为 $a=2, b=6, c=1$，

又因为 $b^2-4ac=6^2-4\times2\times1=36-8=28$，

所以 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-6\pm\sqrt{28}}{2\times2}=\dfrac{-6\pm2\sqrt{7}}{4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$，

即 $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}, x_2=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}$.

2．解一元二次方程

2．4　因式分解法

探　究

配方法、公式法都可求解方程 $x^2-2x=0$，那么还有没有更简便的方法求解这个方程呢？

把方程 $x^2-2x=0$ 的左边进行因式分解

$$x^2-2x=x(x-2),$$

即方程 $x^2-2x=0$ 可化为 $x(x-2)=0$，得

$$x=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

解这两个一元一次方程可得

$$x_1=0, x_2=2.$$

新 知 识

像探究中那样把一元二次方程的左端进行因式分解，使得方程的左边实现降次，这种解一元二次方程的方法称为**因式分解法**.

归 纳

利用因式分解法解一元二次方程的一般步骤为：

（1）方程化为一般形式；

（2）方程左边因式分解；

（3）至少一个一次因式等于零得到两个一元一次方程；

（4）两个一元一次方程的解就是原方程的解.

知 识 巩 固

• 例 10 • 解下列方程：

(1) $x^2+x=3x+3$；

(2) $(x-1)^2-2x(x-1)=0$；

(3) $2x^2+7x+3=0$；

(4) $(x^2-1)^2-3(x^2-1)=0$.

解：(1) 移项，得

$$x^2+x-(3x+3)=0,$$

$$x(x+1)-3(x+1)=0,$$

因式分解，得 $(x+1)(x-3)=0$，

于是 $x+1=0$ 或 $x-3=0$，

故 $x_1=-1, x_2=3$.

知识巩固

(2) 因式分解，得$(x-1)(x-1-2x)=0$，

即$(x-1)(-x-1)=0$，

$(x-1)(x+1)=0$，

于是 $x-1=0$ 或 $x+1=0$，

故 $x_1=-1, x_2=1$.

(3) 因式分解，得$(2x+1)(x+3)=0$，

于是 $2x+1=0$ 或 $x+3=0$，

因此 $x_1=-3, x_2=-\dfrac{1}{2}$.

(4) 因式分解，得$(x^2-1)(x^2-1-3)=0$，

即$(x^2-1)(x^2-4)=0$，

$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$，

于是 $x+1=0$ 或 $x-1=0$ 或 $x+2=0$ 或 $x-2=0$，

因此 $x_1=-1, x_2=1, x_3=-2, x_4=2$.

2．解一元二次方程

2．5　一元二次方程的根与系数的关系

探　　究

解下列方程，并填写表 2-2：

表 2-2

方　程	x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$
$x^2-2x=0$				
$x^2+3x-4=0$				
$2x^2-5x+3=0$				

观察表 2-2，能得到什么结论？

若 x_1，x_2 为关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$（p，q 为常数，$p^2-4q\geqslant 0$）的两个根，结合表 2-2，说明 x_1+x_2 与 x_1x_2 与 p，q 有何关系．请写出关系式．

新 知 识

一般地，对于关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 时，利用求根公式求出它的两个根 x_1，x_2，

即 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

由此可得

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

因此，能得出以下结果，即

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

也就是说，任何一个一元二次方程的根与系数的关系：两个根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两个根的积等于常数项与二次项系数的比.

归　纳

根与系数关系使用的前提如下：

(1) 方程是一元二次方程，即 $a \neq 0$；

(2) 方程为一般形式，即形如：$ax^2+bx+c=0$；

(3) 方程的判别式大于等于零，即 $b^2-4ac \geqslant 0$.

知识巩固

例 11 已知一元二次方程 $x^2+2x-3=0$ 的两个实数根分别为 x_1，x_2，不解方程求下列各式的值：

(1) x_1+x_2；　(2) x_1x_2.

解：由题知，一元二次方程 $x^2+2x-3=0$ 中，$a=1$，$b=2$，$c=-3$，

(1) $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-2$.

(2) $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-3$.

知识巩固

·例 12· 已知 x_1,x_2 是一元二次方程 $2x^2-kx-3=0$ 的两个实数根，且 $x_1+x_2-2x_1x_2=0$，求 k 的值.

解：由题知，一元二次方程 $2x^2-kx-3=0$ 中，$a=2,b=-k,c=-3$，

因此
$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{k}{2},$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-\frac{3}{2},$$

$$x_1+x_2-2x_1x_2=\frac{k}{2}-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=0,$$

解得 $k=-6$，

当 $k=-6$ 时，$\Delta=b^2-4ac=60>0$，满足原方程有两个实数根，

所以 $k=-6$.

3．实际问题与一元二次方程

问题

某毕业班的每一个同学都将自己的照片向全班其他同学各送一张留作纪念，全班共送出2 550张照片，请问这个班共有多少毕业生？

新 知 识

运用一元二次方程解应用题的一般步骤为：

① 设未知数；② 用已知数和未知数表示相关的量；③ 根据等量关系列出方程；④ 解方程，并检验方程的解是否符合题意；⑤ 作答.

归　纳

利用方程解决实际生活中的问题时,先将实际生活中的问题转化为数学问题(建立数学模型)即转化为方程,运用方程知识解决数学问题,再回到实际生活中,解决实际问题.

知 识 巩 固

·例 13· 某次商品交易会，参加商品交易会的每家公司之间签订了一份合同，所有公司共签订了 45 份合同，则有多少家公司参加这次商品交易会？

解：设有 x（家）公司参加这次商品交易会，根据题意可列方程

$$\frac{x(x-1)}{2}=45,$$

解得 $x_1=10$，$x_2=-9$，依题意知 $x_2=-9$（舍），

因此共有 10 家公司参加这次商品交易会.

知 识 巩 固

• 例 14 • 某市计划用两年时间将城市绿地面积从 1.44 km² 提高到 2.25 km²，求每年的平均增长率？

解：设每年的平均增长率为 x，根据题意可列方程

$$1.44\times(1+x)^2=2.25,$$

解得 $x_1=0.25$，$x_2=-2.25$（舍），

所以该城市绿地面积每年的平均增长率为 25%.

2.3 含绝对值的方程

1．绝对值的概念

问题　两辆汽车从同一处 O 出发，分别向东、西方向行驶 10 km，到达 A，B 两地(图 2-1)．它们的行驶路线相同吗？它们的行驶路程相等吗？

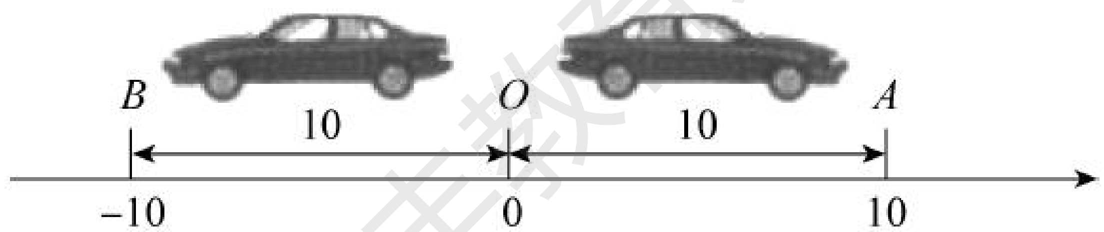

图 2-1

新 知 识

一般地，数轴上表示数 a 的点与原点的距离称为数 a 的**绝对值**，记作 $|a|$.

由绝对值的定义可知：**一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0.** 即

(1) 如果 $a>0$，那么 $|a|=a$；

(2) 如果 $a=0$，那么 $|a|=0$；

(3) 如果 $a<0$，那么 $|a|=-a$.

归　纳

在含有绝对值式子的运算及变形中，绝对值的性质有很重要的作用，其主要性质有：

(1) $|a|\geqslant 0$；若 $|a|+|b|=0$，则 $a=b=0$（非负性）.

(2) 若 $|a|=|b|$，则 $a=\pm b$；$|a|^2=|a^2|=a^2$.

(3) $|ab|=|a||b|$；$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$.

(4) $|a|\geqslant a$，$|a|\geqslant -a$.

(5) $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

特别地：若干个非负数之和等于 0，则这几个非负数必须同时为 0，即

$$|a|+|b|+\cdots+|n|=0,\text{则 } a=b=\cdots=n=0.$$

知 识 巩 固

• 例 15 • 若 $|a|+|b-2|=0$，求 a 和 b 的值.

解：依题意得：$a=0$，$b-2=0$，所以 $a=0$，$b=2$.

• 例 16 • 已知 $|a|=7$，$|b|=5$，且 $|a-b|=b-a$，求 $a+b$.

解：依题意得，$a=\pm 7$，$b=\pm 5$，

又因为 $|a-b|=-(a-b)$，

所以 $a-b<0$，即 $a<b$，

得 $a=-7$，$b=\pm 5$，

因此，① 当 $a=-7$，$b=5$ 时，$a+b=-2$；

② 当 $a=-7$，$b=-5$ 时，$a+b=-12$.

• 例 17 • 已知 $1<a<3$，化简 $|1-a|+|3-a|$.

解：依题意得，$1-a<0$，$3-a>0$，

所以 $|1-a|+|3-a|=a-1+3-a=2$.

2．含绝对值的一次方程

新 知 识

一般地，把绝对值符号中含有未知数的方程称为**绝对值方程**.

归 纳

解绝对值方程的基本方法：去掉绝对值符号，把绝对值方程转化为一般方程.

形如 $|ax+b|=c(a\neq 0)$ 的绝对值方程的解法为：

(1) 当 $c<0$ 时，根据绝对值的非负性，可知此时方程无解；

(2) 当 $c=0$ 时，原方程变为 $|ax+b|=0$，即 $ax+b=0$，解得 $x=-\dfrac{b}{a}$；

(3) 当 $c>0$ 时，原方程变为 $ax+b=c$ 或 $ax+b=-c$，解得 $x=\dfrac{c-b}{a}$ 或 $x=\dfrac{-c-b}{a}$.

知 识 巩 固

• 例 18 • 解方程：$|2x-1|=3$.

解：由题意知，$2x-1=-3$ 或 $2x-1=3$，

解得 $x=-1$ 或 $x=2$，

即原方程的解为 $x_1=-1$，$x_2=2$.

• 例 19 • 解方程：$|x-(2x-1)|=3$.

解：方程可化为 $|x-1|=3$，

去掉绝对值符号，得 $x-1=3$ 或 $x-1=-3$，解得 $x_1=4$，$x_2=-2$，

故原方程的解为 $x_1=4$，$x_2=-2$.

3．含绝对值的一次分式方程

问题

一艘轮船在静水中的最大航速为 20 km/h，它沿江以最大航速顺流航行 100 km 所用的时间，与以最大航速逆流航行 60 km 所用的时间相等，江水的流速是多少？

设江水的流速是 v km/h，根据两次航行“所用的时间相等”这一等量关系，得到方程

$$\frac{100}{20+v}=\frac{60}{20-v}.$$

新 知 识

分母中含有未知数的方程称为**分式方程**.

归 纳

解分式方程的一般步骤为：

① 去分母，方程两边同时乘以最简公分母，将分式方程转化为整式方程；

② 解整式方程；

③ 检验：将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值不为 0，则整式方程的解是分式方程的解；如果最简公分母的值为 0，则整式方程的解不是分式方程的解，是分式方程的增根，原分式方程无解.

在绝对值符号中含有未知数的分式方程，先将这个方程转化为整式绝对值方程，然后解这个整式绝对值方程，求出其解，再检验所求的解是否是原方程的解.

知 识 巩 固

·例 20· 解下列方程：

(1) $\dfrac{4}{|x+2|}=3$；

(2) $\dfrac{|x+4|}{|x-3|}=2$.

解：(1) 因为 $|x+2|\neq 0$，所以 $4=3|x+2|$，

所以 $|x+2|=\dfrac{4}{3}$，解得 $x=-\dfrac{2}{3}$ 或 $x=-\dfrac{10}{3}$，

经检验可得，$x_1=-\dfrac{2}{3}$，$x_2=-\dfrac{10}{3}$ 都是原方程的解.

(2) 原方程可化为 $|x+4|=2|x-3|$，所以 $x+4=\pm 2(x-3)$，

即 $x+4=2(x-3)$ 或 $x+4=-2(x-3)$，

解得 $x=10$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$.

2.4 二元一次方程组

1．二元一次方程组

问题

为响应“文明学生，美丽校园”的号召，某中学计划在学校公共场所安装温馨提示牌和垃圾箱.已知安装3个温馨提示牌和6个垃圾箱需要花费600元，安装8个温馨提示牌和12个垃圾箱需要花费1 300元.那么安装1个温馨提示牌和1个垃圾箱各需要花费多少元？

探　究

在上面的问题中，假设安装1个温馨提示牌和1个垃圾箱分别需要花费 x，y 元，则可以得到

$$3x+6y=600,$$

$$8x+12y=1\ 300,$$

这两个方程有什么特点，与一元一次方程有什么不同？

新 知 识

一般地，每个方程中都含有两个未知数（x 和 y），并且含有未知数的项的次数都是 1，像这样的方程称为**二元一次方程**.

上面的问题中包含两个必须同时满足的条件，也就是未知数 x，y 必须同时满足方程

$$3x+6y=600 \quad ①$$

和

$$8x+12y=1\ 300 \quad ②$$

把这两个方程合在一起，就组成了一个**方程组**，即

$$\begin{cases}3x+6y=600,\\8x+12y=1\ 300.\end{cases}$$

这个方程组中有两个未知数，每个未知数的次数都是 1，并且包含两个方程，像这样的方程组称为**二元一次方程组**.

探　究

观察表 2-3 中 x 与 y 的各组值,并分析哪些满足方程 ①,哪些满足方程 ②?

表 2-3

x	100	65	50
y	50	65	75

通过验证,可以得到 $x=100$,$y=50$ 及 $x=50$,$y=75$ 是方程 ① 的解;$x=65$,$y=65$ 及 $x=50$,$y=75$ 是方程 ② 的解.

新 知 识

一般地，使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值，称为**二元一次方程的解**.

同时满足二元一次方程组中两个方程的公共解称为**二元一次方程组的解**.

例如，$\begin{cases} x=50 \\ y=75 \end{cases}$就是方程组$\begin{cases} 3x+6y=600 \\ 8x+12y=1\ 300 \end{cases}$的解.

知识巩固

·例 21· 下列方程中是二元一次方程的有________.

①$2x-5=y$；　　②$x-1=4$；　　③$(xy)^2=3$；

④$x+y=6$；　　⑤$x+\frac{1}{2}y=3$；　　⑥$x^2-8y=0$.

解：只有①④⑤满足二元一次方程的概念；②为一元一次方程，方程中只含有一个未知数；③中含未知数的项的次数为 2；⑥中未知数 x 的次数为 2.

知 识 巩 固

·例 22· 已知二元一次方程$\frac{x}{4}+\frac{3}{2}y=1$.

(1) 用含有 x 的代数式表示 y；

(2) 用含有 y 的代数式表示 x；

(3) 用适当的数填空，使$\begin{cases} x=-2 \\ y=____ \end{cases}$是方程的解.

解：(1) 将方程变形为 $3y=2-\frac{x}{2}$,

化 y 的系数为 1，得 $y=\frac{2}{3}-\frac{x}{6}$.

(2) 将方程变形为$\frac{x}{2}=2-3y$,

化 x 的系数为 1，得 $x=4-6y$.

(3) 把 $x=-2$ 代入 $y=\frac{2}{3}-\frac{x}{6}$，得 $y=1$.

2．代入法解二元一次方程组

探　究

前面学习了一元一次方程与一元二次方程的求解方法，它们都只含有一个未知数，但二元一次方程组含有两个未知数，能不能将求解二元一次方程组转化成求解一元一次方程呢？

把方程 $x-y=2$ 用含有 x 的代数式表示 y，可表示为 $y=x-2$，把 $y=x-2$ 代入方程 $2x+y=7$ 得 $2x+(x-2)=7$，这样就把解二元一次方程组 $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ 的问题转化成求解只关于 x 的一元一次方程的问题，从而得到方程组的解.

新 知 识

二元一次方程组中有两个未知数,先消去其中一个未知数,再把二元一次方程组转化为一元一次方程,这样就可以先求出一个未知数,再求另一个未知数.这种将未知数的个数由多化少,逐一解决的思想,称为**消元**.

像上面那样,把二元一次方程组中一个方程的一个未知数用含另一个未知数的式子表示出来,再代入另一个方程,实现消元,进而求得这个二元一次方程组的解.这种方法称为**代入消元法**,简称**代入法**.

归　纳

代入法解二元一次方程组的一般步骤为：

(1)“变”：从方程组中选出一个系数比较简单的方程，将这个方程中的一个未知数(例如 y)用含另一个未知数(例如 x)的代数式表示出来，即写成 $y=ax+b$ 的形式；

(2)“代”：将 $y=ax+b$ 代入另一个方程中，消去 y，得到一个关于 x 的一元一次方程；

(3)“解”：解出这个一元一次方程，求出 x 的值；

(4)“回代”：把求得的 x 值代入 $y=ax+b$ 中，求出 y 的值；

(5)“联”：把 x，y 的值用“{”联立起来.

知识巩固

·例 23· 解方程组 $\begin{cases}2x+5y=-21,\\x+3y=8.\end{cases}$

解：$\begin{cases}2x+5y=-21, & ①\\x+3y=8. & ②\end{cases}$

由②得 $x=8-3y$， ③

把③代入①，得 $2(8-3y)+5y=-21$，

解得 $y=37$，

把 $y=37$ 代入③，得 $x=8-3\times37=-103$，

故这个方程组的解是 $\begin{cases}x=-103,\\y=37.\end{cases}$

知识巩固

·例 24· 解方程组$\begin{cases}3x-4y=9,\\9x-10y=3.\end{cases}$

解：$\begin{cases}3x-4y=9, & ①\\9x-10y=3. & ②\end{cases}$

由①得 $3x=4y+9$，③

把③代入②得，$3(4y+9)-10y=3$，

解得，$y=-12$，

把 $y=-12$ 代入③，得 $3x=4\times(-12)+9$，

解得 $x=-13$，

故这个方程组的解是$\begin{cases}x=-13,\\y=-12.\end{cases}$

2．代入法解二元一次方程组

探　究

前面学习了一元一次方程与一元二次方程的求解方法，它们都只含有一个未知数，但二元一次方程组含有两个未知数，能不能将求解二元一次方程组转化成求解一元一次方程呢？

把方程 $x-y=2$ 用含有 x 的代数式表示 y，可表示为 $y=x-2$，把 $y=x-2$ 代入方程 $2x+y=7$ 得 $2x+(x-2)=7$，这样就把解二元一次方程组 $\begin{cases}x-y=2\\2x+y=7\end{cases}$ 的问题转化成求解只关于 x 的一元一次方程的问题，从而得到方程组的解.

新 知 识

当二元一次方程组的两个方程中的同一个未知数的系数互为相反数或相等时，把这两个方程的两边分别相加或相减，就能消去这个未知数，得到一个一元一次方程. 这种方法称为**加减消元法**，简称**加减法**.

归 纳

加减法解二元一次方程组的一般步骤为：

(1)“乘”：方程组的两个方程中，如果同一个未知数的系数既不互为相反数也不相等，那么就用适当的数乘方程两边，使同一个未知数的系数互为相反数或相等；

(2)“加减”：把两个方程的等号两边分别相加或相减，消去一个未知数，得到一个一元一次方程；

(3)“解”：解这个一元一次方程，求得一个未知数的值；

(4)“回代”：将这个求得的未知数的值代入原方程组中任意一个方程中，求出另一个未知数的值；

(5)“联”：把求得的两个未知数的值用“{”联立起来.

知 识 巩 固

·例 25· 用加减法解方程组 $\begin{cases}2x+3y=14,\\4x-5y=6.\end{cases}$

解：$\begin{cases}2x+3y=14, & ①\\4x-5y=6. & ②\end{cases}$

由 ①×2 得 $4x+6y=28$，　③

③－② 得 $11y=22$，解得 $y=2$，

把 $y=2$ 代入 ②，得 $4x-5\times2=6$，解得 $x=4$，

故方程组的解为 $\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}$

知识巩固

•例 26• 解方程组 $\begin{cases}\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1,\\ 3x-\dfrac{y}{2}=-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

解：方程组可化为 $\begin{cases}3x+4y=12, & ①\\ 6x-y=-3. & ②\end{cases}$

由 ① $\times$ 2 得 $6x+8y=24$，　③

③ − ② 得 $9y=27$，

解得 $y=3$，

把 $y=3$ 代入 ①，得 $3x+4\times3=12$，

解得 $x=0$，

故方程组的解为 $\begin{cases}x=0,\\ y=3.\end{cases}$

2.5 三元一次方程组的解法

探　究

在某届奥运会上，我国体育健儿共获得奖牌 100 枚，令国人振奋，世界瞩目.此届奥运会我国在金牌榜上位居第一位，其中金牌比银牌的 2 倍还多 9 块，银牌比铜牌少 7 块.问在此届奥运会中，我国健儿共获得金牌、银牌、铜牌各多少块?

分析：设我国健儿共获得金牌、银牌、铜牌分别为 x，y，z（块），根据题意，可以列出下面三个方程

$$x+y+z=100,$$
$$x=2y+9,$$
$$z=y+7.$$

这个问题必须同时满足上面三个条件.因此，需要把这三个方程组合在一起，即

$$\begin{cases}x+y+z=100,\\ x=2y+9,\\ z=y+7.\end{cases}$$

新 知 识

• 例 26 • 解方程组 $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1, \\ 3x-\dfrac{y}{2}=-\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

解：方程组可化为 $\begin{cases} 3x+4y=12, & ① \\ 6x-y=-3. & ② \end{cases}$

由 ①×2 得 $6x+8y=24$，　③

③－② 得 $9y=27$，

解得 $y=3$，

把 $y=3$ 代入 ①，得 $3x+4\times3=12$，

解得 $x=0$，

故方程组的解为 $\begin{cases} x=0, \\ y=3. \end{cases}$

归　纳

解三元一次方程组的一般步骤为：

(1) 观察方程组中每个方程的特点，确定消去的未知数；

(2) 利用加减消元法或代入消元法，消去一个未知数，得到二元一次方程组；

(3) 解二元一次方程组，求出两个未知数的值；

(4) 将所得的两个未知数的值代入原三元一次方程组中的某个方程，求出第三个未知数的值；

(5) 写出三元一次方程组的解.

知识巩固

例 27 解方程组$\begin{cases} y=2x-7, & ① \\ 5x+3y+2z=2, & ② \\ 3x-4z=4. & ③ \end{cases}$

分析:观察方程组可知,在方程①,③中,分别缺少含有未知数z,y的项,从而用含x的代数式分别表示y,z,再代入②就可以直接消去y,z了.

解:$\begin{cases} y=2x-7, & ① \\ 5x+3y+2z=2, & ② \\ 3x-4z=4. & ③ \end{cases}$

由③得,$z=\frac{3}{4}x-1$, ④

把①,④代入②,得$x=2$, ⑤

把⑤代入①,得$y=-3$,

把⑤代入③,得$z=\frac{1}{2}$,

因此,这个三元一次方程组的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-3, \\ z=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

知识巩固

·例 28· 解方程组 $\begin{cases}2x+4y+3z=9,\\3x-2y+5z=11,\\5x-6y+7z=13.\end{cases}$

分析：方程组中含 y 的项系数依次是 $4,-2,-6$，且 $4=-2\times(-2)$，$-6=-2\times3$。由此可先消去未知数 y.

解：$\begin{cases}2x+4y+3z=9, & ①\\3x-2y+5z=11, & ②\\5x-6y+7z=13. & ③\end{cases}$

由 ①＋②×2 得，$8x+13z=31$， ④

由 ②×3－③ 得，$4x+8z=20$， ⑤

解由 ④，⑤ 组成的方程组 $\begin{cases}8x+13z=31,\\4x+8z=20,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\z=3,\end{cases}$

把 $x=-1$，$z=3$ 代入 ①，得 $y=\dfrac{1}{2}$，

因此，这个三元一次方程组的解是

$$\begin{cases}x=-1,\\y=\dfrac{1}{2},\\z=3.\end{cases}$$

小 结

一、本章知识结构图

- 方程与方程组
  - 一元一次方程
    - 从算式到方程
    - 解一元一次方程（一）
    - 解一元一次方程（二）
    - 实际问题与一元一次方程
  - 一元二次方程
    - 一元二次方程的相关概念
    - 解一元二次方程
    - 实际问题与一元二次方程
  - 含绝对值的方程
    - 绝对值的概念
    - 含绝对值的一次方程
    - 含绝对值的一次分式方程
  - 二元一次方程组
    - 二元一次方程组
    - 代入法解二元一次方程组
    - 加减法解二元一次方程组
  - 三元一次方程组的解法

二、知识回顾

方程(组)是一种重要的描述现实世界的数学模型．本章通过一系列实际问题,介绍了求解一元一次方程的一般步骤,以及公式法、配方法、因式分解法等求解一元二次方程的方法．认识了二元一次方程(组)和三元一次方程(组),研究了用代入消元法及加减消元法求解方程组的一般步骤和解题思路．

解方程(组)的过程是使方程(组)的形式逐步简化,最终得出未知数的值的过程．在此过程中,化归的思想方法起了重要作用,而等式的性质及运算法则是化归的依据．