中华人民共和国教育部直属出版社
语文出版社
Language & Culture Press
www.ywcbs.com

初中升中职课程衔接

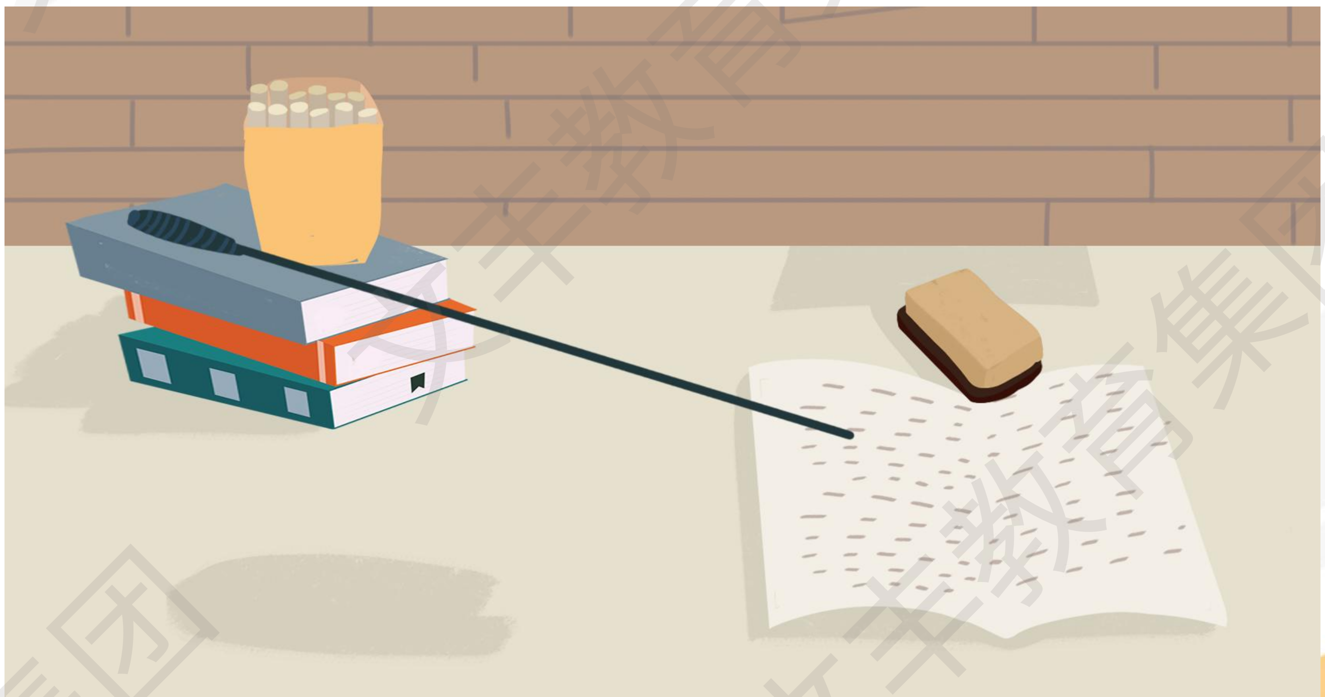
数学

第一章　数与式

目录
CONTENTS

在实际生活中,数与式的应用非常广泛．在人们日常的生产生活、市场经营、经济核算、体育比赛、生态环保等各个领域中,都有数与式应用的范例．

本章将介绍实数,整式的运算,乘法公式,因式分解,分式和二次根式的概念及相关计算,并通过实例了解它们在实际生活中的应用．



1.1 实 数

1．平方根

问题1　小明打算动手制作一朵花，为了使花朵更具立体感，他对花朵进行了多层设计，为此，先要准备面积分别为 169 dm^2，121 dm^2，81 dm^2，49 dm^2，25 dm^2 的五张正方形彩纸，那么这五块正方形彩纸的边长分别为多少？完成表 1-1．

表 1-1

正方形的面积/dm^2	25	49	81	121	169
正方形的边长/dm					

新 知 识

一般地，如果一个非负数 x 的平方等于 a，那么就把这个非负数 x 称为 a 的**算数平方根**．a 的算数平方根可用符号表示为 $\sqrt{a}$，读作"根号 a"，a 称为**被开方数**．即

$$x=\sqrt{a}\,(a\geqslant 0).$$

规定：0 的算术平方根还是 0.

注意：当式子 $\sqrt{a}$ 有意义时，a 一定表示一个非负数，即 $\sqrt{a}\geqslant 0$，$a\geqslant 0$.

问题2　对于任意的一个非负数 x，若 $x^2=a$，则 $(-x)^2=a$，由前面的定义可知，x 称为 a 的算数平方根，那么 $-x$ 与 a 有什么关系呢？

新 知 识

如果 $x^2=a$，那么 x 称为 a 的**平方根**，也称为**二次方根**．求一个数 a 的平方根的运算，称为**开平方**．平方与开平方互为逆运算．常用符号 $\pm\sqrt{a}\ (a\geq 0)$ 来表示 $a\ (a\geq 0)$ 的平方根，其中 $\sqrt{a}$ 是 a 的算术平方根．

探　　究

完成表 1-2 与表 1-3，观察这几组数据的特征．

表 1-2

x	-2	2	-3	3	-5	5	0
x 的平方							

表 1-3

x	0	4	9	25
x 的平方根				

归　纳

完成表 1-2 与表 1-3，观察这几组数据的特征.

表 1-2

x	-2	2	-3	3	-5	5	0
x 的平方							

知识巩固

·例 1· x 为何值时,下列各式有意义?

(1) $\sqrt{x^2}$; (2) $\sqrt{x-4}$; (3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$; (4) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$.

解:(1) 因为 $x^2 \geqslant 0$,所以 x 取任何值时,$\sqrt{x^2}$ 都有意义.

(2) 由题意可知,$x-4 \geqslant 0$,所以 $x \geqslant 4$ 时,$\sqrt{x-4}$ 有意义.

(3) 由题意可知,$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 0, \end{cases}$

解得 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

所以 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$ 有意义.

(4) 由题意可知,$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x-3 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x \geqslant 1$ 且 $x \neq 3$,

所以当 $x \geqslant 1$ 且 $x \neq 3$ 时,$\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ 有意义.

知识巩固

·例 2· 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{25^2-24^2}\times\sqrt{3^2+4^2}$；　　(2) $\sqrt{20\frac{1}{4}}-\frac{1}{3}\sqrt{0.36}-\frac{1}{5}\sqrt{900}$.

解：(1) $\sqrt{25^2-24^2}\times\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{49}\times\sqrt{25}=7\times5=35$.

(2) $\sqrt{20\frac{1}{4}}-\frac{1}{3}\sqrt{0.36}-\frac{1}{5}\sqrt{900}=\sqrt{\frac{81}{4}}-\frac{1}{3}\times0.6-\frac{1}{5}\times30=\frac{9}{2}-0.2-6=-1.7$.

·例 3· 求下列各式中的 x：

(1) $x^2-361=0$；　　(2) $(x+1)^2=289$；

(3) $9(3x+2)^2-64=0$.

解：(1) 因为 $x^2-361=0$，所以 $x^2=361$，故 $x=\pm\sqrt{361}=\pm19$.

即 $x=19$ 或 $x=-19$.

(2) 因为 $(x+1)^2=289$，所以 $x+1=\pm\sqrt{289}$，故 $x+1=\pm17$，

即 $x=16$ 或 $x=-18$.

(3) 因为 $9(3x+2)^2-64=0$，所以 $(3x+2)^2=\frac{64}{9}$，故 $3x+2=\pm\frac{8}{3}$，

即 $x=\frac{2}{9}$ 或 $x=-\frac{14}{9}$.

2．立方根

问题

由平方根的性质可知若 $x^2=a$，则 x 是 a 的平方根或二次方根；若 $x^3=a$，可以得到什么结论呢？

新知识

如果一个数 x 的立方等于 a，即 $x^3=a$，那么这个数 x 就称为 a 的**立方根**，也称为**三次方根**. 例如，$2^3=8$，2 就称为 8 的立方根.

a 的立方根可表示为"$\sqrt[3]{a}$"，读作"三次根号 a"，其中 3 是根指数，a 是被开方数. 要注意，这里的根指数 3 不能省略. 例如：2 的立方根可表示为 $\sqrt[3]{2}$.

求一个数的立方根的运算称为**开立方**. 开立方和立方互为逆运算.

探　究

由 $(-2)^3=-8$，得 $\sqrt[3]{-8}=-2$，由 $2^3=8$，得 $\sqrt[3]{8}=2$；

由 $\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27}$，得 $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3}$，由 $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，得 $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}$.

由此可知，若 $a>0$，则 $\sqrt[3]{a}$ ______ 0；若 $a=0$，则 $\sqrt[3]{a}$ ______ 0；若 $a<0$，则 $\sqrt[3]{a}$ ______ 0(用“>”“<”或“=”填空).

填空：

$\sqrt[3]{-8}=$ ________；　　$-\sqrt[3]{8}=$ ________；

$\sqrt[3]{-64}=$ ________；　　$-\sqrt[3]{64}=$ ________；

$\sqrt[3]{-512}=$ ________；　　$-\sqrt[3]{512}=$ ________.

当两个数 a 与 $-a$ 互为相反数时，这两个数的立方根之间有什么关系呢？

归　纳

(1) 任何实数都有且仅有一个立方根；

(2) 立方根的符号与被开方数的符号一致.

(3) 互为相反数的两个数 a 与 $-a$ 的立方根也互为相反数.即

$$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}.$$

知识巩固

·例4· 求下列各数的立方根：

(1) -125；　(2) $-\frac{64}{125}$；　(3) -0.125.

解：(1) 因为 $(-5)^3=-125$，所以 -125 的立方根是 -5，即

$$\sqrt[3]{-125}=-5.$$

(2) 因为 $\left(-\frac{4}{5}\right)^3=-\frac{64}{125}$，所以 $-\frac{64}{125}$ 的立方根是 $-\frac{4}{5}$，即

$$\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}=-\frac{4}{5}.$$

(3) 因为 $(-0.5)^3=-0.125$，所以 -0.125 的立方根是 -0.5，即

$$\sqrt[3]{-0.125}=-0.5.$$

知识巩固

·例5· 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{-216}\times\sqrt[3]{\frac{343}{8}}$；

(2) $-\sqrt[3]{(-4)^3}+\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{-512}$.

解：(1) $\sqrt[3]{-216}\times\sqrt[3]{\frac{343}{8}}=-6\times\frac{7}{2}=-21$；

(2) $-\sqrt[3]{(-4)^3}+\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{-512}=4+5+8=17$.

3．实数

问题

有理数可以表示为有限小数或无限循环小数，那么像 π，$\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，…，这样的数又该如何归类呢？

新知识

无限不循环小数称为**无理数**.有理数和无理数统称为**实数**.实数可以这样分类：

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{matrix}\text{正整数}\\\text{零}\end{matrix}\right\}\text{自然数}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}
$$

探　　究

对于任意一个实数 a，它的相反数是否为 $-a$？

归　　纳

一般地，数 a 的相反数是 $-a$，其中，a 表示任意一个实数.

一个正实数的绝对值是它本身，一个负实数的绝对值是它的相反数，0 的绝对值是 0. 一般地，对于任意一个实数 a 有

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时},\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

知识巩固

·例6· 计算下列各式的值：

(1) $|2-\pi|+\sqrt{18}-3\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$；　　(2) $\sqrt{50}-|\sqrt[3]{-64}|+\sqrt{12}\times\sqrt{3}$.

解：(1) $|2-\pi|+\sqrt{18}-3\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=\pi-2+3\sqrt{2}-3(\sqrt{2}-1)=\pi+1$.

(2) $\sqrt{50}-|\sqrt[3]{-64}|+\sqrt{12}\times\sqrt{3}=5\sqrt{2}-4+2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=5\sqrt{2}+2$.

1.2 幂及整式的运算

1．同底数幂的乘法

问题 某种型号的电子计算机每秒可运算 1 000 万亿（10^{15}）次，请问当它工作 10^5 s时可进行多少次运算？

当它工作 10^5 s时，可运算的次数为$10^{15}\times10^5$，如何计算$10^{15}\times10^5$呢？根据乘方的意义可知

$$10^{15}\times10^{5}=\underbrace{(10\times10\times\cdots\times10)}_{15个}\times(10\times10\times10\times10\times10)$$

$$=\underbrace{10\times10\times\cdots\times10}_{20个}$$

$$=10^{20}.$$

探　　究

完成表 1-4.

表 1-4

算式	运算过程	结果
$2^2\times2^3$	$(2\times2)\times(2\times2\times2)$	
$10^3\times10^4$		
$a^2\times a^3$		
$a^4\times a^5$		

观察表 1-4,找找这些算式有什么特点,运算结果有什么规律.

新 知 识

由上面的探究可知

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m\text{个}a} \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n\text{个}a} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(m+n)\text{个}a} = a^{m+n}.$$

也就是说，**同底数幂相乘，底数不变，指数相加**，即

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}\ (m, n\text{ 都是正整数}).$$

知 识 巩 固

·例 1· 计算：

(1)$x^3\cdot x^4$；　　(2)$a^2\cdot a^3$；

(3)$(-3)\times(-3)^3\times(-3)^5$；　　(4)$a^m\cdot a^{2m-1}$.

解：(1)$x^3\cdot x^4=x^{3+4}=x^7$；

(2)$a^2\cdot a^3=a^{2+3}=a^5$.

(3)$(-3)\times(-3)^3\times(-3)^5=(-3)^{1+3+5}=(-3)^9=-19\ 683$.

(4)$a^m\cdot a^{2m-1}=a^{m+2m-1}=a^{3m-1}$.

2．幂的乘方

探　　究

填空：

(1) $(3^5)^2 = 3^5 \times 3^5 = 3^{(\ \ )}$；

(2) $(2^{-1})^3 =$ __________ $= 2^{(\ \ )}$；

(3) $(a^m)^2 =$ __________ $= a^{(\ \ )}$.

观察上面几道题的计算结果，可以得到什么规律？如果设 n 为正整数，将(3)式中的指数 2 换成 n，即 $(a^m)^n$，其结果是什么呢？

新 知 识

对于任意底数 a 与任意正整数 m，n，

$$(a^m)^n=\underbrace{(a^m)\cdot(a^m)\cdot\cdots\cdot(a^m)}_{n\text{个}a^m}$$

$$=a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{个}m}}$$

$$=a^{mn}.$$

由此可知，**计算幂的乘方时，底数不变，指数相乘**，即

$$(a^m)^n=a^{mn}\ (m,n\text{ 都是正整数}).$$

知识巩固

例 2 计算：

(1) $(2^2)^3$； (2) $(a^3)^4$； (3) $(x^n)^4$； (4) $-(x^2)^3$.

解：(1) $(2^2)^3=2^{2\times3}=2^6=64$.

(2) $(a^3)^4=a^{3\times4}=a^{12}$.

(3) $(x^n)^4=x^{4n}$.

(4) $-(x^2)^3=-x^{2\times3}=-x^6$.

3．积的乘方

探　究

填空：

(1) $(3\times5)^7$

$=\underbrace{(3\times5)\times(3\times5)\times\cdots\times(3\times5)}_{7个(3\times5)}$

$=\underbrace{(3\times3\times\cdots\times3)}_{7个3}\times$ ________

$=3^7\times5^7$；

(2) $(3\times5)^n=\underbrace{(3\times5)\times(3\times5)\times\cdots\times(3\times5)}_{n个(3\times5)}$

$=\underbrace{(3\times3\times\cdots\times3)}_{n个3}\times\underbrace{(5\times5\times\cdots\times5)}_{n个5}$

$=$ ________（n 为正整数）.

观察上面几道题的计算结果，能得到什么规律？如果设 n 为正整数，将式(2)中的底数换成 ab，即 $(ab)^n$，其结果是什么呢？

新 知 识

对于任意底数 a,b 与任意正整数 n,

$$
\begin{aligned}
(ab)^n &= (ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab) \\
&= \underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n\text{个}b} = a^nb^n.
\end{aligned}
$$

因此,

$$(ab)^n = a^nb^n\ (n\text{ 为正整数}).$$

即积的乘方,等于把积的每一个因式分别乘方,再把所得的幂相乘.

知 识 巩 固

·例 3· 计算：

(1)$(2b)^3$； (2)$(-3a)^3$； (3)$(x^2y^2)^2$； (4)$(-3y^2)^4$.

解：(1)$(2b)^3=2^3\cdot b^3=8b^3$.

(2)$(-3a)^3=(-3)^3\cdot a^3=-27a^3$.

(3)$(x^2y^2)^2=(x^2)^2\cdot(y^2)^2=x^4y^4$.

(4)$(-3y^2)^4=(-3)^4\cdot(y^2)^4=81y^8$.

4．零指数幂与负整指数幂

探　究

填空：

(1)$5^2 \div 5^2 = 5^{2-2} =$ ________.

(2)$10^3 \div 10^3 =$ ________ $=$ ________.

(3)$a^5 \div a^5 = a^{5-5} =$ ________ $(a \neq 0)$.

可以看到，这几个式子的被除式等于除式，由除法的意义可知，所得的商都等于1.

新 知 识

由上面的探究可知，$5^0=1$，$10^0=1$，$a^0=1(a\neq 0)$.

这就是说，**任何不等于零的数的零次幂都等于1**，即

$$a^0=1(a\neq 0).$$

如果仿照同底数幂的除法公式来计算，得

$$5^2\div 5^5=5^{2-5}=5^{-3},$$

$$10^3\div 10^7=10^{3-7}=10^{-4}.$$

利用约分又可以得到

$$5^2\div 5^5=\frac{5^2}{5^5}=\frac{5^2}{5^2\times 5^3}=\frac{1}{5^3},$$

$$10^3\div 10^7=\frac{10^3}{10^7}=\frac{10^3}{10^3\times 10^4}=\frac{1}{10^4}.$$

这就是说，**任何非零的数的 $-n$（n 为正整数）次幂，等于这个数的 n 次幂的倒数**，即

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}(a\neq 0).$$

知识巩固

·例 4· 计算：

(1)$a^{-2}\div a^{3}$；(2)$2x^{-2}y\cdot 3xy^{-2}$；(3)$(a^{-1}b^{2})^{3}$；(4)$\left(\dfrac{b^{3}}{a^{2}}\right)^{-2}$.

解：(1)$a^{-2}\div a^{3}=a^{-2-3}=a^{-5}=\dfrac{1}{a^{5}}$.

(2)$2x^{-2}y\cdot 3xy^{-2}=6x^{-2+1}y^{1-2}=6x^{-1}y^{-1}=\dfrac{6}{xy}$.

(3)$(a^{-1}b^{2})^{3}=(a^{-1})^{3}(b^{2})^{3}=a^{-3}b^{6}=\dfrac{b^{6}}{a^{3}}$.

(4)$\left(\dfrac{b^{3}}{a^{2}}\right)^{-2}=(b^{3}\cdot a^{-2})^{-2}=a^{4}b^{-6}=\dfrac{a^{4}}{b^{6}}$.

5．整式的乘法

问题

一个长方体储货仓的长为 4×10^3 cm，宽为 3×10^3 cm，高为 5×10^2 cm，那么这个货仓的体积是多少？

根据长方体体积的计算公式可知，该货仓的体积为 $(4\times10^3)\times(3\times10^3)\times(5\times10^2)\text{cm}^3$.

探　究

(1) 如何计算$(4\times10^3)\times(3\times10^3)\times(5\times10^2)$？计算过程中用到哪些运算律及运算性质？

(2) 如果将上式中的数字改为字母，比如$am^3\times bm^3\times cm^2$，该如何计算这个式子？

新 知 识

单项式与单项式相乘时，可以利用乘法交换律、结合律及幂的运算性质来计算.即

$$am^3 \cdot bm^3 \cdot cm^2 = (a \cdot b \cdot c) \cdot (m^3 \cdot m^3 \cdot m^2) = abcm^8.$$

一般地，单项式与单项式相乘时，可以把它们的系数、同底数幂分别相乘，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式.

知 识 巩 固

·例 5· 计算：

(1) $(-3x^2y)(-2x)$；　　(2) $(3a)^2(-4ab^2)$.

解：(1) $(-3x^2y)(-2x)=[(-3)\times(-2)]\cdot(x^2\cdot x)\cdot y=6x^3y$.

(2) $(3a)^2(-4ab^2)=9a^2\cdot(-4ab^2)=[9\times(-4)]\cdot(a^2\cdot a)\cdot b^2=-36a^3b^2$.

5．整式的乘法

问题

在一次绿色环保活动的知识竞答中有15人获奖，每人获得1本笔记本，1支钢笔，1个杯子，其中笔记本单价为6元，钢笔单价为13元，杯子的单价为21元，则购买这些奖品总共花费是多少？

总共花费为

$$(6+13+21)\times 15=6\times 15+13\times 15+21\times 15.$$

探　究

将上式中的数字用字母代替可得到

$$(a+b+c)m=am+bm+cm.$$

观察有什么规律.

新 知 识

单项式与多项式相乘，就是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加.

利用乘法的分配律还可得到

$$\begin{aligned}&(m+n)(a+b)\\=&m(a+b)+n(a+b)\\=&ma+mb+na+nb.\end{aligned}$$

即多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项去乘另外一个多项式的每一项，然后把所得的积相加.

知识巩固

·例 6· 计算：

(1)$3x(a+2b)$；　　(2)$(2x-3y)(x+y)$.

解：(1)$3x(a+2b)=3xa+6xb$.

(2)$(2x-3y)(x+y)$

$=2x\cdot x+2x\cdot y-3y\cdot x-3y\cdot y$

$=2x^2+2xy-3xy-3y^2$

$=2x^2-xy-3y^2$.

6．整式的除法

在整式运算中，常常还会遇到两个整式相除的情况．由于除法是乘法的逆运算，因此可以利用整式的乘法来讨论整式的除法．

首先来看同底数幂相除的情况．

计算 $a^m \div a^n(a \neq 0, m, n$ 都是正整数，并且 $m > n)$．

根据除法是乘法的逆运算，计算被除数除以除数所得的商，就是求一个数，使它与除数的积等于被除数．由于式中的字母表示数，所以可以用类似的方法来计算 $a^m \div a^n$．

因为 $a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$，

所以 $a^m \div a^n = a^{m-n}$．

新 知 识

一般地，

$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a \neq 0$，m，n 都是正整数，并且 $m > n$）.

即同底数幂相除，底数不变，指数相减.

知识巩固

例 7 计算：

(1) $a^5 \div a^2$；　　(2) $(ab)^6 \div (ab)^3$.

解：(1) $a^5 \div a^2 = a^{5-2} = a^3$.

(2) $(ab)^6 \div (ab)^3 = (ab)^{6-3} = (ab)^3 = a^3b^3$.

新 知 识

单项式相除时,把系数与同底数幂分别相除作为商的因式,对于只在被除式里含有的字母,则连同它的指数作为商的一个因式.

多项式除以单项式时,先把多项式的每一项除以单项式,再把所得的商相加.

知识巩固

·例 8· 计算：

(1)$16a^5b^2 \div 4a^2b$；　　(2)$(10x^4-6x^3+2x)\div(2x)$.

解：(1)$16a^5b^2 \div 4a^2b=(16\div 4)\cdot a^{5-2}\cdot b^{2-1}=4a^3b$.

(2)$(10x^4-6x^3+2x)\div(2x)=10x^4\div(2x)-6x^3\div(2x)+2x\div(2x)=5x^3-3x^2+1$.

1．３　乘法公式

1．平方差公式

探 究

填空：

(1)$(x+3)(x-3)=$________；

(2)$(3m+2)(3m-2)=$________；

(3)$(2x+3)(2x-3)=$________．

由上面各式计算的结果，观察这三个式子的左端有什么共同特征，右端又有什么共同特征．

新 知 识

通过上面几个式子的计算可知

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

其中 a,b 可以表示任意数,也可以表示任意的单项式或多项式.

即两个数的和与它们的差的乘积,等于这两个数的平方差.

这个公式称为(乘法的) **平方差公式.**

知 识 巩 固

·例 1· 运用平方差公式计算：

(1) $(3x+4)(3x-4)$；　(2) $(-3x+5y)(-3x-5y)$.

解：(1) $(3x+4)(3x-4)=(3x)^2-4^2=9x^2-16$.

(2) $(-3x+5y)(-3x-5y)=(-3x)^2-(5y)^2=9x^2-25y^2$.

·例 2· 计算：

(1) $(3y+5)(3y-5)-(2y+1)(2y-3)$；　(2) 103×97.

解：(1) $(3y+5)(3y-5)-(2y+1)(2y-3)$

$=9y^2-25-(4y^2-6y+2y-3)$

$=9y^2-25-4y^2+4y+3=5y^2+4y-22$.

(2) $103\times97=(100+3)(100-3)=100^2-3^2=10\ 000-9=9\ 991$.

2．完全平方公式

探　究

计算下列多项式的积.

(1) $(m+1)^2=(m+1)(m+1)=$________;

(2) $(n+2)^2=$________;

(3) $(m-1)^2=(m-1)(m-1)=$________;

(4) $(n-2)^2=$________.

观察有什么规律.

新 知 识

观察上式可知，上述问题中的式(1)和式(2)的左端都是$(a+b)^2$的形式，右边都是$a^2+2ab+b^2$的形式，即

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

式(3)和式(4)的左端都是$(a-b)^2$的形式，右边都是$a^2-2ab+b^2$的形式，即

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

因此，**两个数的和(或差)的平方，等于它们的平方和，加上(或减去)它们的积的2倍.**这两个公式称为**完全平方公式.**

知识巩固

·例 3· 运用完全平方公式计算：

(1) $(2x+y)^2$；　　(2) $(x-3)^2$.

解：(1) $(2x+y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot y+y^2$

$=4x^2+4xy+y^2$.

(2) $(x-3)^2=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2$

$=x^2-6x+9$.

·例 4· 运用完全平方公式计算：

(1) 103^2；　　(2) 98^2.

解：(1) $103^2=(100+3)^2=100^2+2\times100\times3+3^2=10\ 000+600+9=10\ 609$.

(2) $98^2=(100-2)^2=100^2-2\times100\times2+2^2=10\ 000-400+4=9\ 604$.

知识巩固

·例 5· 运用乘法公式计算：

(1) $(a+2b-3)(a-2b+3)$；

(2) $(a+b+c)^2$.

解：(1) $(a+2b-3)(a-2b+3)$

$=[a+(2b-3)][a-(2b-3)]$

$=a^2-(2b-3)^2$

$=a^2-(4b^2-12b+9)$

$=a^2-4b^2+12b-9$.

(2) $(a+b+c)^2$

$=[(a+b)+c]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

1．4　因式分解

探　究

该如何把下列多项式写成整式的乘积的形式？

(1)$x^3+x=$________；(2)$x^2-4=$________.

新知识

上面的探究中，把一个多项式化成几个整式的积的形式，这种变形称为这个多项式的**因式分解**，也称为把这个多项式**分解因式**.

下面学习因式分解的四种基本方法.

1．提取公因式法

新 知 识

以式 x^3+x 为例，它的每一项都有一个公共的因式 x，常把因式 x 称为这个多项式各项的**公因式**.

一般地，如果一个多项式的各项都含有公因式，可以把这个公因式提取出来，将多项式写成公因式与另一个因式的乘积的形式，这种分解因式的方法叫作**提取公因式法**.

知 识 巩 固

·例 1· 把 $4x^2y^3-6xy$ 分解因式.

分析：先找出 $4x^2y^3$ 与 $-6xy$ 的公因式，再提出公因式.这两项的系数为 4 与 -6，最大公约数是 2；两项的字母部分 x^2y^3 与 xy 的公因式为 xy.

解：$4x^2y^3-6xy$

$=2xy\cdot 2xy^2-2xy\cdot 3$

$=2xy(2xy^2-3)$.

·例 2· 把 $x(a+b)+2y(a+b)$ 分解因式.

分析：$a+b$ 是这个式子的公因式，可以直接提出来.

解：$x(a+b)+2y(a+b)=(a+b)(x+2y)$.

2．公式法

探　究

多项式 x^2-y^2 可以分解因式吗？

新 知 识

这个多项式是两个数的平方差的形式，由于整式的乘法与因式分解是方向相反的变形，把整式乘法的平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的等号两边互换位置，就得到

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

即两个数的平方差，等于这两个数的和与它们的差的乘积.

知识巩固

·例3· 分解因式：

(1) x^2-4y^2； (2) $(m+n)^2-(m-n)^2$.

解：(1) $x^2-4y^2=x^2-(2y)^2=(x+2y)(x-2y)$.

$$
\begin{aligned}
(2)\ (m+n)^2-(m-n)^2 &= [(m+n)+(m-n)][(m+n)-(m-n)] \\
&= (2m)\cdot(2n) \\
&= 4mn.
\end{aligned}
$$

探　究

多项式 $x^2+2xy+y^2$ 与 $x^2-2xy+y^2$ 可以分解因式吗?

新 知 识

这两个多项式是两个数的平方和加上或减去这两个数的积的 2 倍,这恰是两个数的和或差的平方,一般把 $x^2+2xy+y^2$ 和 $x^2-2xy+y^2$ 这样的式子称为完全平方式.利用完全平方公式可以把形如完全平方式的多项式因式分解.

把整式乘法的完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

的等号两边互换位置,就得到

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,$$

即两个数的平方和加上(或减去)它们的积的 2 倍,等于这两个数的和(或差)的平方.

可以看出,如果把乘法公式的等号两边互换位置,就可以得到用于分解因式的公式,这些公式可以用来把某些具有特殊形式的多项式分解因式,这种分解因式的方法称为**公式法**.

知 识 巩 固

·例 4· 分解因式：

(1)$x^2+6xy+9y^2$；　　(2)$-4x^2+4xy-y^2$.

解：(1)$x^2+6xy+9y^2=x^2+2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2=(x+3y)^2$；

(2)$-4x^2+4xy-y^2=-[4x^2-4xy+y^2]=-[(2x)^2-2\cdot 2x\cdot y+y^2]=-(2x-y)^2$.

·例 5· 分解因式：

(1)$2mx^2+8mxy+8my^2$；　　(2)$(m-n)^2-10(m-n)+25$.

解：(1) $2mx^2+8mxy+8my^2=2m(x^2+4xy+4y^2)=2m(x+2y)^2$；

(2) $(m-n)^2-10(m-n)+25=(m-n)^2-2\cdot(m-n)\cdot 5+5^2=(m-n-5)^2$.

3．十字相乘法

探　究

填空：

(1) $(x+3)(x+4)=$________；

(2) $(x+3)(x-4)=$________；

(3) $(x-3)(x+4)=$________；

(4) $(x-3)(x-4)=$________.

仔细观察等式两边，可得到什么规律？

新 知 识

由以上各式可以看出，两个一次二项式相乘，可以得到一个二次三项式，即

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

反过来，一个二次三项式也可以分解为两个一次二项式的积，即

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

一般地，如果二次三项式 x^2+px+q 中的常数项系数 q，能分解成两个因数 a，b 的积，而且一次项系数 p 又恰好是 $a+b$，那么 x^2+px+q 就可以按上述方法分解因式，这种因式分解的方法称为**十字相乘法**.

知 识 巩 固

·例 6· 分解因式：

(1)$x^2-7x+12$；　　(2)$x^2+6xy-16y^2$.

解：(1)$x^2-7x+12=x^2+(-3-4)x+(-3)\times(-4)$

$=(x-3)(x-4)$；

(2)$x^2+6xy-16y^2=x^2+(8-2)xy+8\times(-2)y^2$

$=(x+8y)(x-2y)$.

4．分组分解法

探　究

填空：

(1)$ax+ay-bx-by=(ax+ay)-(\quad)=a(\quad)-b(\quad)$
$(\quad)(\quad)$；

(2)$x^2+y-y^2+x=(x^2-y^2)+(\quad)=(\quad)(\quad)$；

(3)$x^2+2xy+y^2-a^2=(\quad)-a^2=(\quad)^2-a^2=(\quad)(\quad)$.

仔细观察计算过程，可得到什么规律？

新 知 识

多项式的某些项通过适当的结合可合并成为一组，利用分组来分解一个多项式的因式，这种方法称为**分组分解法**.

知 识 巩 固

例 7 分解因式：

(1) $am+an+bm+bn$；

(2) $7x^2+3y+xy+21x$；

(3) $x^2-y^2+ax+ay$；

(4) $x^2-2x+1-y^2$.

解：(1) $am+an+bm+bn=a(m+n)+b(m+n)$

$$=(a+b)(m+n).$$

(2) $7x^2+3y+xy+21x=(7x^2+xy)+(21x+3y)$

$$=x(7x+y)+3(7x+y)$$

$$=(x+3)(7x+y).$$

(3) $x^2-y^2+ax+ay=(x+y)(x-y)+a(x+y)$

$$=(x+y)(x-y+a).$$

(4) $x^2-2x+1-y^2=(x-1)^2-y^2$

$$=(x-1+y)(x-1-y).$$

1．5　分式

1．分式的概念

问题

1.班长给同学们买苹果，一共花了100元，买了a kg苹果.

(1) 请问，平均每千克苹果多少钱?

(2) 本班有m名男生和n名女生共同分a kg苹果，则平均每人可分得______kg苹果.

2.现有x公顷水稻，共收稻谷y t，则平均每公顷产量为______t.

由上面的问题可得到三个式子：$\frac{100}{a}$，$\frac{a}{m+n}$，$\frac{y}{x}$.

探　究

上面的三个式子有什么共同特征？它们与前面所学的整式有什么区别？

新 知 识

可以发现，上面的式子都是$\frac{A}{B}$的形式，A，B 都为整式，且 B 中含有字母.

若用 A，B 表示两个整式，B 中含有字母，则整式 A 除以整式 B，可以表示成$\frac{A}{B}$的形式，式子$\frac{A}{B}$就称为**分式**，A 称为分子，B 称为分母.

探　究

式子$\frac{A}{B}$什么时候有意义?

新知识

类比分数有意义的条件可知,当 $B \neq 0$ 时,分式$\frac{A}{B}$有意义.

·例 1· 下列分式中的字母满足什么条件时分式有意义?

(1) $\frac{m}{n-0.6}$;　　(2) $\frac{1}{2x}$;

(3) $\frac{2x+1}{3x}$;　　(4) $\frac{x-2y}{x+y}$.

解:(1) 要使分式$\frac{m}{n-0.6}$有意义,则分母 $n-0.6 \neq 0$,即 $n \neq 0.6$;

(2) 要使分式$\frac{1}{2x}$有意义,则分母 $2x \neq 0$,即 $x \neq 0$;

(3) 要使分式$\frac{2x+1}{3x}$有意义,则分母 $3x \neq 0$,即 $x \neq 0$;

(4) 要使分式$\frac{x-2y}{x+y}$有意义,则分母 $x+y \neq 0$,即 $x \neq -y$.

2．分式的基本性质

探　究

（1）下列分数是否相等？如果相等，它们之间进行变形的依据是什么？

$$\frac{3}{4},\frac{6}{8},\frac{9}{12},\frac{15}{20},\frac{30}{40}.$$

（2）类比分数的基本性质，分式有什么性质？

新 知 识

分式的分子与分母乘以（或除以）同一个不等于 0 的整式，分式的值不变. 这个性质称为分式的基本性质.

用式子表示为

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}(C\neq 0),$$

其中 A，B，C 是整式.

知识巩固

·例 2· 填空：

(1) $\dfrac{b^3}{ab^2}=\dfrac{(\quad)}{a}$；

(2) $\dfrac{4xy}{2x^2+2xy}=\dfrac{2y}{(\quad)}$.

解：(1) 因为$\dfrac{b^3}{ab^2}$的分母除以 b^2 才能化为 a，为保证分式的值不变，根据分式的基本性质，分子也需除以 b^2，即

$$\frac{b^3}{ab^2}=\frac{b^3\div b^2}{ab^2\div b^2}=\frac{b}{a}.$$

所以，括号中应填 b.

(2) 因为$\dfrac{4xy}{2x^2+2xy}$的分子除以 $2x$ 才能化为 $2y$，为保证分式的值不变，根据分式的基本性质，分母也需除以 $2x$，即$\dfrac{4xy}{2x^2+2xy}=\dfrac{4xy\div 2x}{(2x^2+2xy)\div 2x}=\dfrac{2y}{x+y}$.

所以，括号中应填 $x+y$.

探　究

类比分数的约分,应如何对分式进行约分?

新知识

类比分数的约分,利用分式的基本性质,把一个分式的分子和分母的公因式约去,称为分式的**约分**.经过约分后的分式,其分子与分母没有公因式,这样的分式称为**最简分式**.

分式的约分,一般要约去分子和分母所有的公因式,使所得结果成为最简分式或者整式.

知识巩固

·例 3· 约分：

(1) $\dfrac{ab^2+2b}{b}$；　　(2) $\dfrac{a^2-4}{ab+2b}$.

分析：分式进行约分时，需要找出分子和分母的公约式.

解：(1) $\dfrac{ab^2+2b}{b}=\dfrac{b(ab+2)}{b}=ab+2$.

(2) $\dfrac{a^2-4}{ab+2b}=\dfrac{(a-2)(a+2)}{b(a+2)}=\dfrac{a-2}{b}$.

探　　究

联想分数的通分,分式应如何进行通分?

新 知 识

类比分数的通分,利用分式的基本性质,把几个异分母的分式分别化成与原来的分式相等的同分母的分式,称为分式的**通分**.

知识巩固

·例 4· 通分：

(1) $\frac{2n}{n-2}$，$\frac{3n}{n+3}$；　　(2) $\frac{a}{2b^2}$，$\frac{1}{-3a^2}$，$\frac{5}{6abc}$.

分析：分式进行通分时，需要先确定各分式的公分母，一般取所有因式的最高次幂的积作公分母，即**最简公分母**.

解：(1) 最简公分母是$(n-2)(n+3)$.

$$\frac{2n}{n-2}=\frac{2n(n+3)}{(n-2)(n+3)}=\frac{2n^2+6n}{n^2+n-6};$$

$$\frac{3n}{n+3}=\frac{3n(n-2)}{(n+3)(n-2)}=\frac{3n^2-6n}{n^2+n-6}.$$

(2) 最简公分母是 $6a^2b^2c$.

$$\frac{a}{2b^2}=\frac{a\cdot 3a^2c}{2b^2\cdot 3a^2c}=\frac{3a^3c}{6a^2b^2c};$$

$$\frac{1}{-3a^2}=\frac{1\cdot(-2b^2c)}{-3a^2\cdot(-2b^2c)}=-\frac{2b^2c}{6a^2b^2c};$$

$$\frac{5}{6abc}=\frac{5\cdot ab}{6abc\cdot ab}=\frac{5ab}{6a^2b^2c}.$$

3．分式的运算

3．1　分式的乘除

探　究

类比分数的乘除法法则，分式的乘除法法则应该是什么？

新 知 识

类比分数的乘除法法则，分式的乘除法有如下法则.

乘法法则：**分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母.** 即

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

除法法则：**分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.** 即

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

知识巩固

·例 5· 计算：

(1) $\frac{ax^2}{b^2y}\cdot\frac{by}{ax}$；　　(2) $\frac{m-1}{m}\div\frac{m-1}{m^2}$.

解：(1) $\frac{ax^2}{b^2y}\cdot\frac{by}{ax}=\frac{abx^2y}{ab^2xy}=\frac{x}{b}$.

(2) $\frac{m-1}{m}\div\frac{m-1}{m^2}=\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m^2}{m-1}=\frac{(m-1)m^2}{m(m-1)}=m$.

进行分式运算时，应把运算结果化为最简分式，分子、分母是多项式时，通常先分解因式，再约分.

探　究

$\left(\frac{a}{b}\right)^2=$______；　$\left(\frac{a}{b}\right)^3=$______；　$\left(\frac{a}{b}\right)^{10}=$______.

观察上述等式，可发现什么规律？

新 知 识

根据乘方的意义和分式的乘法法则，有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{b}}_{n个}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n个}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n个}}=\frac{a^n}{b^n}\text{（}n\text{ 是正整数），}$$

即分式乘方时，要把分子、分母分别乘方.

知识巩固

例 6 计算：

(1) $\left(\frac{-y^2}{x}\right)^2$；　　(2) $\left(\frac{5ab^3}{-3c}\right)^3$.

解：(1) $\left(\frac{-y^2}{x}\right)^2=\frac{(-y^2)^2}{x^2}=\frac{y^4}{x^2}$.

(2) $\left(\frac{5ab^3}{-3c}\right)^3=\frac{(5ab^3)^3}{(-3c)^3}=\frac{125a^3b^9}{-27c^3}=-\frac{125a^3b^9}{27c^3}$.

3．2　分式的加减

探　究

分式的加减法与分数的加减法类似，并且它们的实质相同．

观察下列分数加减运算的式子：

$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$，$\frac{1}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$，$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3}{6}-\frac{4}{6}=-\frac{1}{6}$．

可以类比得出分式的加减法法则吗？

新 知 识

类比分数的乘除法法则，分式的乘除法有如下法则．

3．2　分式的加减

新知识

类似分数的加减法，分式的加减法法则如下：

同分母分式相加减，分母不变，把分子相加减；

异分母分式相加减，先通分，变为同分母的形式，再加减.

上述法则可用式子表示为

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c},$$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

知识巩固

例 7 计算：

(1) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+2}{x+1}$；　　(2) $\dfrac{a+b}{ab}-\dfrac{b+c}{bc}$.

解：(1) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x+x+2}{x+1}=\dfrac{2(x+1)}{x+1}=2$.

(2) $\dfrac{a+b}{ab}-\dfrac{b+c}{bc}=\dfrac{(a+b)c}{abc}-\dfrac{(b+c)a}{abc}=\dfrac{b(c-a)}{abc}=\dfrac{c-a}{ac}$.

4．分式方程

新知识

一般地，分母含有未知数的方程称为**分式方程**，例如$\frac{3}{x}=1$，$\frac{s}{v}=t$，$\frac{1}{x}=\frac{5}{x+3}$.整式方程中，它们的未知数不在分母中.

解分式方程的基本思路是将分式方程化为整式方程，具体做法是去分母，即方程两边同乘以最简公分母，这是解分式方程的一般方法.

归纳

一般地，解分式方程时，消去分母后，所得整式方程的解有可能使原方程中的分母为0，因此应做如下检验：

将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母不为0，则整式方程的解是原分式方程的解；否则，这个解不是原分式方程的解.

知识巩固

·例8· 解方程：

(1) $\frac{1}{x}=\frac{5}{x+3}$；　　(2) $\frac{x-2}{x+3}-\frac{3}{x-3}=1$.

解：(1) 方程$\frac{1}{x}=\frac{5}{x+3}$两边同乘以 $x(x+3)$，得 $x+3=5x$，

解得 $x=\frac{3}{4}$.

检验：将 $x=\frac{3}{4}$ 代入$\frac{1}{x}=\frac{5}{x+3}$中，左边$=\frac{4}{3}=$右边，

因此，$x=\frac{3}{4}$ 是分式方程$\frac{1}{x}=\frac{5}{x+3}$的解.

(2) 方程$\frac{x-2}{x+3}-\frac{3}{x-3}=1$ 两边同乘以$(x+3)(x-3)$，得

$x^2-5x+6-3x-9=x^2-9$，解得：$x=\frac{3}{4}$.

经检验，$x=\frac{3}{4}$ 是分式方程的解.

知 识 巩 固

例 9 解方程 $\frac{x}{x-1}-1=\frac{3}{(x-1)(x+2)}$.

解：方程两边乘 $(x-1)(x+2)$，得

$x(x+2)-(x-1)(x+2)=3$，解得 $x=1$.

检验：当 $x=1$ 时，$(x-1)(x+2)=0$，因此 $x=1$ 不是原分式方程的解.

因此，原分式方程无解.

1．6　二次根式

1．二次根式的概念

新 知 识

一般地，形如$\sqrt{a}$（$a\geqslant0$）的式子称为**二次根式**，其中，a 称为被开方数，$\sqrt{\ }$ 读作“二次根号”或“根号”.

当 $a>0$ 时，$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根，因此$\sqrt{a}>0$；当 $a=0$ 时，$\sqrt{a}$ 表示 0 的算术平方根，因此$\sqrt{a}=0$.这就是说，当 $a\geqslant0$ 时，$\sqrt{a}\geqslant0$.

一般地，

$$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0);$$

$$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0).$$

此外，用基本运算符号（加、减、乘、除、乘方和开方）把数或表示数的字母连接起来的式子称为**代数式**.

知识巩固

·例 1· 计算：

(1) $(\sqrt{2.3})^2$；　(2) $(2\sqrt{2})^2$；　(3) $\sqrt{25}$；　(4) $\sqrt{(-3)^2}$.

解：(1) $(\sqrt{2.3})^2=2.3$.

(2) $(2\sqrt{2})^2=2^2\times(\sqrt{2})^2=8$.

(3) $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$.

(4) $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{3^2}=3$.

2．二次根式的乘除

探　究

计算并观察下列各式，总结规律.

(1) $\sqrt{4}\times\sqrt{9}=$________，$\sqrt{4\times 9}=$________；

(2) $\sqrt{25}\times\sqrt{81}=$________，$\sqrt{25\times 81}=$________；

(3) $\sqrt{36}\times\sqrt{49}=$________，$\sqrt{36\times 49}=$________.

新 知 识

一般地，二次根式的乘法法则是

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\,(a\geqslant 0,b\geqslant 0).$$

把$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\,(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$反过来，就得到

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

利用上式可以进行二次根式的化简.

知识巩固

例 2 计算：

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$；　　(2) $\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{27}$.

解：(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

(2) $\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{27}=\sqrt{\frac{1}{3}\times 27}=\sqrt{9}=3$.

例 3 化简：

(1) $\sqrt{(-4)\times(-81)}$；　　(2) $\sqrt{16\times 25}$.

解：(1) $\sqrt{(-4)\times(-81)}=\sqrt{4\times 81}=\sqrt{4}\times\sqrt{81}=2\times 9=18$.

(2) $\sqrt{16\times 25}=\sqrt{16}\times\sqrt{25}=4\times 5=20$.

探　究

计算并观察下列各式,总结规律.

(1) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=$________,$\sqrt{\frac{4}{9}}=$________;

(2) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}}=$________,$\sqrt{\frac{25}{81}}=$________;

(3) $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}=$________,$\sqrt{\frac{36}{49}}=$________.

新 知 识

一般地,二次根式的除法法则是

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0).$$

二次根式除法法则的逆用,即

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0).$$

利用它可以进行二次根式的化简.

归　纳

观察上述例子的计算结果，例如$\frac{\sqrt{15}}{3}$，$\frac{5\sqrt{5}}{4}$，可以发现这些式子有如下两个特点：

(1) 被开方数不含分母；

(2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

一般地，把满足上述两个条件的二次根式称为**最简二次根式**.

在二次根式的运算中，一般要把最后的结果化为最简二次根式，并且分母中不含二次根式.

知 识 巩 固

·例 4· 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$；

(3) $\sqrt{5\dfrac{4}{9}}$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{-125}{-16}}$.

解：(1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\sqrt{\dfrac{5\times 3}{3\times 3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

(2) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{24}{6}}=\sqrt{4}=2$.

(3) $\sqrt{5\dfrac{4}{9}}=\sqrt{\dfrac{49}{9}}=\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}}=\dfrac{7}{3}$.

(4) $\sqrt{\dfrac{-125}{-16}}=\sqrt{\dfrac{125}{16}}=\dfrac{\sqrt{25\times 5}}{\sqrt{16}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$.

3．二次根式的加减

新知识

一般地，进行二次根式加减时，可以先将二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并.

知识巩固

·例5· 计算：

(1) $\sqrt{16a}+\sqrt{25a}$；　　(2) $\sqrt{125}-\sqrt{45}$.

解：(1) $\sqrt{16a}+\sqrt{25a}=4\sqrt{a}+5\sqrt{a}=9\sqrt{a}$.

(2) $\sqrt{125}-\sqrt{45}=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

知识巩固

·例 6· 计算：

(1) $\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{128}+\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{27}+\frac{\sqrt{18}}{3}-\sqrt{0.5}-\frac{6}{\sqrt{3}}$.

解：(1) $\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{128}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2}=-\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{27}+\frac{\sqrt{18}}{3}-\sqrt{0.5}-\frac{6}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

知 识 巩 固

·例 7· 计算：

(1) $\sqrt{24}-\sqrt{18}\times\sqrt{\dfrac{1}{3}}$；　　(2) $\sqrt{2}(\sqrt{8}-\sqrt{2})$；

(3) $(4\sqrt{3}-3\sqrt{6})\div 2\sqrt{3}$；　　(4) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)$.

解：(1) $\sqrt{24}-\sqrt{18}\times\sqrt{\dfrac{1}{3}}=2\sqrt{6}-\sqrt{6}=\sqrt{6}$.

(2) $\sqrt{2}(\sqrt{8}-\sqrt{2})=\sqrt{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{2})=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$.

(3) $(4\sqrt{3}-3\sqrt{6})\div 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\div 2\sqrt{3}-3\sqrt{6}\div 2\sqrt{3}=2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

(4) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)=(\sqrt{2})^{2}-9=-7$.

小　结

一、本章知识结构图

- 数与式
  - 实数
    - 平方根
    - 立方根
    - 实数
  - 幂及整式的运算
    - 同底数幂的乘法
    - 幂的乘方
    - 积的乘方
    - 零指数幂和负整指数幂
    - 整式的乘法
  - 乘法公式
    - 平方差公式
    - 完全平方公式
  - 因式分解
    - 提取公因式法
    - 公式法
    - 十字相乘法
    - 分组分解法
  - 分式
    - 分式的概念
    - 分式的基本性质
      - 约分
      - 通分
    - 分式的运算
      - 分式的乘除
      - 分式的加减
    - 分式方程
  - 二次根式
    - 二次根式的概念
    - 二次根式的乘除
    - 二次根式的加减

二、知识回顾

本章介绍了实数、幂及整式的运算、乘法公式、因式分解、分式、二次根式．在学习数与式的过程中,应重视掌握其概念及形成过程,学会剖析和辨析概念,并可以简单地应用概念．同时,应可以简单地探究各知识点的性质和法则．

在学习过程中,应注重对基础知识的掌握,对基本技能的训练,力求具备简单的运算能力和简单的推理能力．